

# VWAP

Mario Barragan

junio, 2014

- 1 Motivación
- 2 Definición VWAP
- 3 Estrategias VWAP
- 4 Contexto histórico
- 5 Primer modelo
- 6 Conclusiones primer modelo
- 7 Segundo modelo
- 8 Conclusiones segundo modelo
- 9 Bibliografía

En los mercados financieros se evidencia que al momento de negociar un gran volumen de acciones, el precio de negociación generalmente es menos favorable si este es comparado al precio que se obtiene en una negociación donde el volumen a tranzar es pequeño (costos de impacto de liquidez). Al momento de evaluar el desempeño de un gestor de portafolio que busca comprar o vender un bloque de acciones, diferentes medidas han sido desarrolladas. El VWAP fue propuesto como una estimación insesgada del precio logrado por un gestor no estratégico.

## Definición

El VWAP de un activo se define como el cociente entre el valor monetario total del volumen tranzado y el volumen total tranzado dado un horizonte de tiempo (sin pérdida de generalidad se tomará el intervalo  $[0, T]$ ). Es decir, dada una serie de precios  $(S_i)_{i=1}^N$  y de volúmenes  $(V_i)_{i=1}^N$  ejecutados a esos precios en  $[0, T]$ , se tiene

$$VWAP_T = \frac{\sum_{j=1}^N S_j V_j}{\sum_{j=1}^N V_j}$$

*Obs.* Siendo el precio obtenido al tranzar un gran volumen comparado al VWAP se infiere que el desempeño será evaluado con respecto al desempeño que tendría un agente promedio.

## Ejemplo ilustrativo

Supongamos que un fondo de pensiones, entre sus muchos activos, posee el 5% de las acciones de Ecopetrol (lo que se considerará como un gran número de ellas). Un día, el gestor de las inversiones del fondo decide reducir su participación al 2% en un plazo de tiempo predeterminado, digamos, una semana (esta decisión puede deberse a un cambio en las políticas de inversión del fondo o a una nueva regulación por parte de los entes de control). Como proceder sin acarrear con un gran costo? Se debe hacer un balance entre no liquidar demasiado rápido (lo que expondría al costo de liquidez) ni liquidar de manera muy lenta (lo que expondría al costo de oportunidad).

Esencialmente, existen dos estrategias VWAP

- ① Contrato VWAP garantizado: El bloque de acciones es entregado a un broker quien garantiza al final del horizonte de tiempo el VWAP por acción a cambio de una comisión fija. El riesgo de desviarse del VWAP es asumido en su totalidad por el broker.
- ② Orden VWAP por agencia : El broker hará su mayor esfuerzo con el fin de ejecutar el bloque de acciones a un precio lo más cercano posible al VWAP. El VWAP no es garantizado y el precio obtenido al final por el inversionista está supeditado a la habilidad de su broker así como a su honestidad.

Dada la naturaleza del problema, la programación dinámica es el marco natural al momento de buscar una estrategia de liquidación óptima una vez el problema ha sido modelado.

Desarrollo histórico de las técnicas usadas hoy en día:

- 1969 : Merton y Samuelson aplican por primera vez la programación dinámica al área de las finanzas. Esta es aplicada para encontrar el portafolio óptimo de un agente con función de utilidad CRRA.
- 1998 : Bertsimas y Lo atacan el problema de la liquidación óptima de  $N$  acciones usando control estocástico.
- 2000 : Algre y co. extienden el modelo de Bertsimas y Lo, permitiendo el uso de funciones de utilidad. Asimismo resuelven el problema cuando el benchmark es el precio inicial (introduciendo el concepto de IMP)
- 2014 : Guéant y co. resuelven el problema cuando el benchmark es el VWAP considerando también IMP no lineales.

## Observación

En el modelo a desarrollar, en lugar de trabajar con la definición de VWAP en tiempo discreto, se trabajará con su versión continua:

$$VWAP_T = \frac{\int_0^T S_t V_t dt}{\int_0^T V_t dt}$$



Se trabajará sobre el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , el cual indicará la información del mercado disponible al momento de observación. Para  $T > 0$ , se denotará por  $\mathcal{P}(0, T)$  el conjunto de procesos progresivamente medibles (con valores en  $\mathbb{R}$ ) sobre  $[0, T]$ . Se considerará un trader que quiere vender  $q_0$  acciones en dicho periodo. La estrategia de liquidación, que será denotada por  $v$ , es modelada por un proceso estocástico que pertenece al conjunto admisible

$$\mathcal{A} = \left\{ v \in \mathcal{P}(0, T), \int_0^T |v_t| dt \in L^\infty(\Omega), \int_0^T v_t dt = q_0, \mathbb{P} - c.s. \right\}$$

El número de activos que restan por liquidar al momento  $t$ , será denotado por  $q_t$ , luego se tiene

$$q_t = q_0 - \int_0^t v_s ds$$

Asimismo, el volumen acumulado de mercado al momento  $t$ , será denotado por  $Q_t$ , luego

$$Q_t = \int_0^t V_s ds$$

La dinámica del precio del activo será modelado por la ecuación

$$dS_t = \sigma dW_t - f(|q_0 - q_t|)v_t dt, \quad \sigma > 0$$

donde

$\sigma$  : la volatilidad del periodo en consideración

$W_t$  : proceso de Wiener

$f$  : función que modela el impacto de mercado permanente

*Obs.*  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  y será asumida no creciente e integrable alrededor de 0.

## Impacto de mercado permanente

El impacto de mercado permanente hace referencia al cambio en el precio de equilibrio debido a nuestras transacciones el cual persiste hasta a lo menos el tiempo restante de liquidación. En efecto, en tanto que los participantes del mercado perciben un gran volumen siendo liquidado, estos ajustarán sus ofertas bid/ask buscando su mejor escenario con respecto a las órdenes que se ejecutarán.

# Primer modelo

Para  $v \in \mathcal{A}$ , el proceso de capital  $X^v$  esta dado por la ecuación

$$dX_t = dX_t^v = v_t S_t - V_t L\left(\frac{v_t}{V_t}\right)$$

donde  $L \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  modela el impacto de mercado temporal y satisface

- $L(0) = 0$
- $L$  es una función par
- $L$  es creciente en  $\mathbb{R}_+$
- $L$  es estrictamente convexa
- $L$  es asintóticamente superlineal, es decir,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{L(\rho)}{\rho} = +\infty$$

*Obs.* En la práctica,  $L$  es una función potencia.

## Impacto de mercado temporal

El impacto de mercado temporal hace referencia a desviaciones adversas como resultado de absorber el suministro de liquidez disponible. Se asumirá que este impacto se desvanecerá al momento de la próxima transacción debido a la resiliencia del libro de órdenes.

El problema de optimización a resolver es

$$\sup_{v \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T - q_0 VWAP_T))]$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo. Asumiendo el marco de la valoración por indiferencia (equivalente de certeza), la prima a pagar por un contrato de VWAP garantizado es

$$\pi(q_0) = \frac{1}{\gamma} \log \left( - \sup_{v \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T - q_0 VWAP_T)) \right]$$

El siguiente lema es utilizado en los desarrollos posteriores

## Lema 1

Para todo  $v \in \mathcal{A}$ , se tiene

$$\begin{aligned} X_T - q_0 VWAP_T = & - \int_0^{q_0} F(z) dz + q_0 \int_0^T \frac{V_t}{Q_T} F(q_0 - q_t) dt \\ & - \int_0^T V_t L\left(\frac{v_t}{V_t}\right) dt + \sigma q_0 \int_0^T \left(\frac{q_t}{q_0} - \left(1 - \frac{Q_t}{Q_T}\right)\right) dW_t \end{aligned}$$

donde

$$F(q) = \int_0^q f(|z|) dz$$



Asumiendo  $V$  determinista y acotado, se atacará el problema siguiente

$$\sup_{v \in \mathcal{A}_{det}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T - q_0 VWAP_T))]$$

donde

$$\mathcal{A}_{det} = \{v \in \mathcal{A} : v \text{ es } \mathcal{F}_0 - \text{medible}\}$$

Teniendo en cuenta el lema 1, el cual implica que  $X_T - q_0 VWAP_T$  se distribuye normal, el nuevo problema es equivalente a resolver

$$\inf_{v \in \mathcal{A}_{det}} \int_0^T \left( V_t L\left(\frac{v_t}{V_t}\right) - q_0 \frac{V_t}{Q_T} F(q_0 - q_t) + \frac{\gamma}{2} \sigma^2 q_0^2 \left(\frac{q_t}{q_0} - \left(1 - \frac{Q_t}{Q_T}\right)\right)^2 \right) dt$$

# Caso determinista

Si se denota por  $q^*$ , el número de activos a liquidar al seguir la política óptima de liquidación, se llega a la caracterización siguiente

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \gamma \sigma^2 \left( q(t) - q(0) \left( 1 - \frac{Q_t}{Q_T} \right) \right) + q_0 \frac{V_t}{Q_T} f(|q_0 - q(t)|) \\ \dot{q}(t) = V_t H'(p(t)) \end{cases} \quad q(0) = q_0, q(T) = 0$$

Utilizando el siguiente lema, se llega a caracterizar plenamente la política óptima de liquidación si se asume un volumen determinista

## Lema 2

Si se asume  $V_t$  determinista, se tiene

$$\sup_{v \in \mathcal{A}_{det}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T - q_0 VWAP_T))] = \sup_{v \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T - q_0 VWAP_T))]$$

Casos particulares:

- Estrategia VWAP asumiendo ausencia del impacto permanente de mercado ( $f = 0$ ):

## Solución

$$q^*(t) = q_0 \left( 1 - \frac{Q_t}{Q_T} \right) \quad y \quad \pi(q_0) = Q_T L \left( \frac{q_0}{Q_T} \right)$$

# Caso determinista

- Estrategia VWAP si  $V_t = V$ ,  $f = k \geq 0$  y  $L(\rho) = \eta\rho^2$ :

## Solución

$$q^*(t) = q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) - q_0 w(t)$$

y

$$\pi(q_0) = \frac{\eta}{VT} q_0^2 + q_0^2 \int_0^T \left( \frac{\eta}{V} w'(t)^2 - \frac{k}{T} w(t) + \frac{\gamma\sigma^2}{2} w(t)^2 \right) dt$$

donde

$$w(t) = \frac{k}{\gamma\sigma^2 T} \sinh \left( \sqrt{\frac{\gamma\sigma^2 V}{2\eta}} t \right) \left[ \tanh \left( \sqrt{\frac{\gamma\sigma^2 V}{2\eta}} \frac{T}{2} \right) - \tanh \left( \sqrt{\frac{\gamma\sigma^2 V}{2\eta}} \frac{t}{2} \right) \right]$$

# Caso determinista

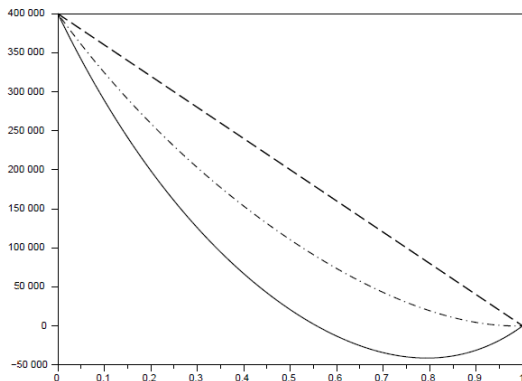


Figure 1: Examples of trading curves for a VWAP strategy.  $S_0 = 50$ ,  $q_0 = 400000$ ,  $V = 4000000$ ,  $\sigma = 0.45$ ,  $\eta = 0.15$ ,  $k = 5 \times 10^{-7}$ ,  $T = 1$  day. Plain line:  $\gamma = 3 \times 10^{-6}$ . Dot-dashed line:  $\gamma = 6 \times 10^{-6}$ . The dashed line corresponds to  $q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ .

En los casos particulares mencionados, se puede llegar a una fórmula cerrada para la solución. En general, es necesario el uso de métodos numéricos con el fin de caracterizar la política de liquidación optimal.

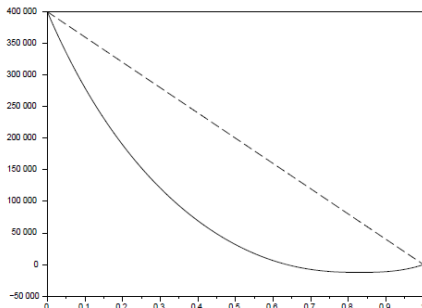


Figure 2: Examples of trading curves for a VWAP strategy (linear permanent market impact and nonlinear execution costs).  $S_0 = 50$ ,  $q_0 = 400000$ ,  $V = 4000000$ ,  $\sigma = 0.45$ ,  $L(\rho) = \eta|\rho|^{1+\phi}$  with  $\eta = 0.12$  and  $\phi = 0.63$ ,  $f = k = 5 \times 10^{-7}$ ,  $T = 1$  day. Plain line:  $\gamma = 3 \times 10^{-6}$ . The dashed line corresponds to  $q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ .

Figure : Ejemplo 2

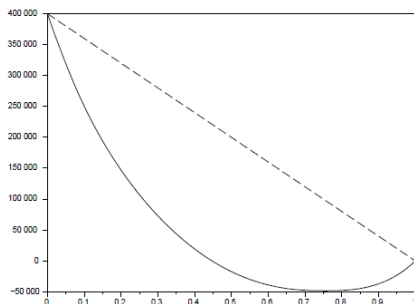


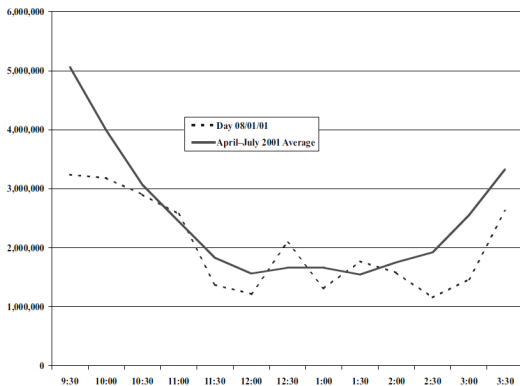
Figure 3: Examples of trading curves for a VWAP strategy (nonlinear permanent market impact and nonlinear execution costs).  $S_0 = 50$ ,  $q_0 = 400000$ ,  $V = 4000000$ ,  $\sigma = 0.45$ ,  $L(\rho) = \eta|\rho|^{1+\phi}$  with  $\eta = 0.12$  and  $\phi = 0.63$ ,  $f(q) = k\alpha q^{\alpha-1}$  with  $k = 2.2 \times 10^{-4}$  and  $\alpha = 0.6$ ,  $T = 1$  day. Plain line:  $\gamma = 3 \times 10^{-6}$ . The dashed line corresponds to  $q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ .

Figure : Ejemplo 3



# Caso estocástico

Haciendo uso de los resultados anteriores, se evidencia la importancia de contar con modelos efectivos para la predicción del volumen de transacción. No obstante, es posible extender el modelo para tener en cuenta un volumen estocástico, esto con el fin de evitar escenarios como el siguiente:



Ahora, se asumirá que la dinámica del volumen es dada por la ecuación

$$\frac{dV_t}{V_t} = \frac{g'(t)}{g(t)} dt + \alpha dB_t$$

donde  $B$  es un MBE independiente de  $W$ ,  $\alpha > 0$  y  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$  representa el volumen instantáneo de mercado en promedio.

# Caso estocástico

Con el fin de caracterizar la estrategia optima de liquidación en el nuevo escenario, se debe encontrar  $\zeta$  solución de viscosidad de:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 \zeta + (q - q_0)^2 \frac{\sigma^2 \gamma}{2} - VH(\partial_q \zeta) = 0 & \text{sobre } [0, T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^2 \\ \zeta(T, y, q, Q, V) = -\frac{Y}{Q} + h(q) \end{cases}$$

donde

$$H(p) = \sup_{\rho \in \mathbb{R}} \rho p - \mathcal{L}(\rho) ; h(q) = - \int_0^q F(z) dz + qF(q_0 - q) + Kq^2 \quad (K \gg 0)$$

y

$$\mathcal{L}_0 = \partial_t + Vq_0 F(q_0 - q) \partial_y + \frac{q_0^2 \sigma^2 Q^2}{2} [\gamma (\partial_y)^2 + \partial_{yy}] + V \partial_Q + V \frac{g'(t)}{g(t)} \partial_V + \frac{\alpha^2 V^2}{2} [\gamma (\partial_V)^2 + \partial_{VV}]$$

## Observación

La ecuación a resolver, dada su complejidad, dificulta el uso de las técnicas clásicas, como las diferencias finitas. Los autores recomiendan usar técnicas probabilísticas al momento de buscar una solución. La implementación de este tipo de técnicas no es por el momento muy común, principalmente debido a su naturaleza altamente no trivial.

Asumiendo que la complejidad de la obtención de la solución de la ecuación recién obtenida sea superada, al momento de una implementación al mundo real, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- En la literatura no hay un criterio unificado de como deben ser calculados los impactos de mercado (permanente y temporal)
- Dado que la liquidación óptimal es continua y por ende en la practica no es posible implementarla de manera exacta, es necesario determinar si al aplicarla, el valor óptimo de la función objetivo dista del valor óptimo en el caso continuo

Existe otra manera de atacar el problema original. En este enfoque, se modela el volumen relativo usando un proceso puente gama.

### Definición

- Un proceso gama  $(L(t))_{t \in [0, T]}$  es un proceso con incrementos independientes e idénticamente distribuidos tal que  $L(0) = 0$  y  $L(t) \sim \Gamma(mt\theta, mt\theta^2)$  donde  $m, \theta > 0$
- Dado un proceso gama  $(L(t))_{t \in [0, T]}$ , el puente gama  $(\gamma(t))_{t \in [0, T]}$  es definido por

$$\gamma(t) = \frac{L(t)}{L(T)}$$

El modelo a desarrollar reposa fuertemente en el siguiente resultado

### Teorema

Sea  $L(t)$  un proceso de Lévy con  $L(T) > 0$  c.s. y no determinista (es decir,  $P[L(T) = c] < 1$  para todo  $c$ ). Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $L$  es un proceso gama.
- Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $L(T)$  y  $L(t)/L(T)$  son independientes.

Tomando el proceso  $Q_t$  definido en el modelo anterior, se tiene el siguiente corolario:

### Corolario

Supongamos que  $Q_t$  tiene incrementos independientes y estacionarios,  $Q_T$  es no determinista y estrictamente positivo c.s., y  $Q(t)/Q(T)$  independiente de  $Q(T)$ . Luego  $Q(t)$  es un proceso gama y  $Q(t)/Q(T)$  es un puente gama.



# Segundo modelo

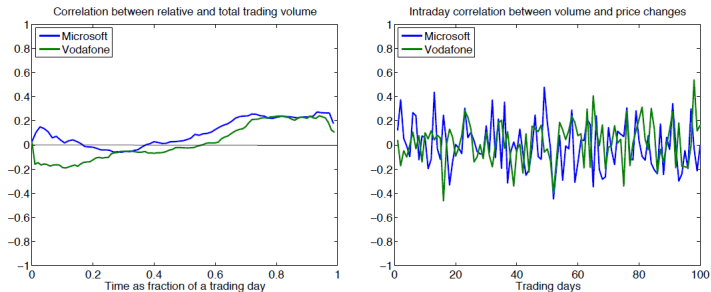


Figure 1: Correlation between relative and total trading volume (left panel) and intraday correlation between volume and price changes (right panel) for the stocks of Vodafone and Microsoft during the first 100 trading days of 2012, using 5-minute intraday data.

Figure : Evidencia grafica independencia

## Segundo modelo

En el nuevo modelo, dado el horizonte de tiempo  $[0, T]$ , se supondrá que se deben comprar  $Y$  acciones (en el desarrollo posterior, por simplicidad se supondrá  $T = 1$ ). La dinámica del número de acciones que se tienen en el tiempo  $t$  siguiendo la estrategia de compra  $u$ , viene dada por

$$dX^u(t) = u(t)dt \quad , \quad X^u(0) = 0 \quad , \quad X^u(T) = Y$$

El proceso de precios del activo,  $(P(t))_{t \in [0, T]}$ , esta dado por

$$P(t) = P(0) + \sigma W(t)$$

donde  $\sigma$  es la volatilidad diaria (en unidades monetarias) y  $W(t)$  es un M.B.E..

El precio a pagar por el activo en el tiempo  $t$  siguiendo la estrategia de compra  $u$ , viene dado por

$$P^u(t) = P(0) + \kappa u(t)$$

donde  $\kappa$  esta ligado al impacto de mercado temporal.

*Obs 1.* En este modelo, no se tiene en cuenta el impacto de mercado permanente.

*Obs 2.* Al modelar  $Q_t$  con un proceso gama y  $P(t)$  con un movimiento browniano aritmético, se tiene que estos dos procesos son independientes.

## Segundo modelo

Después de unos cálculos sencillos, es fácil ver que el gasto total en la compra de las acciones siguiendo la estrategia  $u$ , denotado por  $TE^u$ , está dado por

$$\begin{aligned} TE^u &= \int_0^T P^u(t) dX^u(t) \\ &= YP(0) - \sigma \int_0^T X^u(t) dW^u(t) + \sigma YW(T) + \kappa \int_0^T u^2(t) dt \end{aligned}$$

De otro lado, tomando el puente gama  $\gamma(t)$  tal que  $\gamma(t) = Q_t/Q_T$ , se tiene

$$\begin{aligned} VWAP &= \int_0^T P(t) d(Y\gamma(t)) \\ &= YP(0) - \sigma Y \int_0^T \gamma(t-) dW(t) + \sigma YW(T) \end{aligned}$$

## Segundo modelo

Usando las identidades anteriores, se define la "desviación" de la estrategia  $u$ , denotada por  $slip^u$ , como

$$slip^u = TE^u - VWAP = \sigma \int_0^T (\gamma(t-) - X^u(t)) dW(t) + \kappa \int_0^T u^2(t) dt$$

*Obs.* Se ha normalizado, por ende  $Y = 1$ .

Por lo tanto el problema a resolver es

$$\inf_u (E[slip^u] + \lambda Var[slip^u])$$

Sin embargo, debido a la alta complejidad de este problema, se considerará el siguiente problema simplificado cuya solución es caracterizable con los metodos conocidos

$$\inf_u \left( \kappa E \left[ \int_0^T u^2(t) dt \right] + \lambda \sigma^2 E \left[ \int_0^T (\gamma(t) - X^u(t))^2 dt \right] \right)$$

Definiendo

$$v(t, x, \gamma) = \inf_u E \left[ \kappa \int_t^T u^2(s) ds + \lambda \sigma^2 \int_t^T (\gamma(s) - X^u(s))^2 ds \right]$$

donde  $(\gamma(s))_{t \leq s \leq T}$  es un puente gama con  $\gamma(t) = \gamma$  y el infimo es tomado sobre las estrategias  $u$ , adaptables e integrables tales que

$$dX^u(s) = u(s)ds \quad , \quad X^u(t) = x \quad , \quad X^u(T) = 1$$

se tiene el siguiente resultado.

## Resultado principal

$$v(t, x, \gamma) = a(t)x^2 + b(t)\gamma x + c(t)x + d(t)\gamma^2 + f(t)\gamma + g(t)$$

para  $t \in [0, T)$ ,  $x \geq 0$  y  $\gamma \in [0, 1]$ , donde  $a, b, c, d, f, g : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  están dadas por

$$a(t) = \sqrt{\kappa\lambda\sigma^2} \frac{e^{2T\sqrt{\lambda\sigma^2/\kappa}} + e^{2t\sqrt{\lambda\sigma^2/\kappa}}}{e^{2T\sqrt{\lambda\sigma^2/\kappa}} - e^{2t\sqrt{\lambda\sigma^2/\kappa}}}, \quad b(t) = -2a(t) + \frac{2\kappa}{T-t}$$

$$c(t) = -\frac{2\kappa}{T-t}, \quad d(t) = \int_t^T \left( \lambda\sigma^2 - \frac{1}{4\kappa} b^2(s) \right) \frac{T-s}{T-t} \frac{T-s+1/m}{T-t+1/m} ds$$

$$f(t) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \left( b(s) + 2d(s) \frac{T-s}{T-s+1/m} \right) ds$$

$$g(t) = a(t) - (T-t)\lambda\sigma^2$$

$$- \int_t^T \left( \frac{b(s)}{2} \left( \frac{a(s)}{\kappa} (T-s) + 1 \right) - f(s) - \frac{d(s)/m}{T-s+1/m} \right) \frac{1}{T-s} ds$$

### Resultado principal





El control óptimo  $\hat{u}$  y el correspondiente  $\hat{X}$ , vienen dados por



$$\hat{u}(s) = -\frac{v_x}{2\kappa} \left( s, \hat{X}(s), \gamma(s) \right) = -\frac{2a(s)\hat{X}(s) + b(s)\gamma(s) + c(s)}{2\kappa}$$
$$\hat{X}(s) = xe^{-\frac{1}{\kappa} \int_s^t a(r) dr} - \frac{1}{2\kappa} \int_t^s (b(z)\gamma(z) + c(z)) \exp\left(-\frac{1}{\kappa} \int_z^s a(r) dr\right) dz$$



# Conclusiones segundo modelo

- Si bien los autores son conscientes que sus hipótesis son controvertibles, ellos consideran que es un buen modelo inicial tal como el modelo de Black-Scholes fue un buen modelo inicial para la valoración de derivados.
- El modelo asume una filtración inicial aumentada con el conocimiento del volumen final, es necesario evaluar si este hecho hace inviable una aplicación práctica.

-  R. Almgren and N. Chriss (2000).  
Optimal execution of portfolio transactions.  
*J. Risk* (3), 5-39.
-  D. Bertsimas and A. Lo (1998).  
Optimal control of execution costs.  
*J. Finan. Markets* (1), 1-50.
-  C. Frei, and N. Westray (2013).  
Optimal Execution of a VWAP Order: a Stochastic Control Approach.  
*to appear in Mathematical Finance*.
-  J. Gatheral (2010).  
No-dynamic-arbitrage and market impact.  
*Quant. Finance* (10), 749-759.

-  O. Guant and G. Royer (2014).  
VWAP execution and guaranteed VWAP.  
*to appear in SIAM Journal of Financial Mathematics*
-  A. Madhavan (2002).  
VWAP Strategies.  
*Trading* (1), 32-39.