No. 2
AGOSTO de 2017

quantil | Monografías

Edición electrónica

Derivados Financieros

Diego Jara

quantil | matemáticas aplicadas

Serie de Monografías Quantil, 2017-2
Edición electrónica.

AGOSTO de 2017

Carrera 7 # 77 - 07. Oficina 901, Bogotá, D. C., Colombia
Teléfonos: +57(1) 805 1814
E-mail: info@quantil.com.co
http://www.quantil.com.co

Impreso en Colombia – Printed in Colombia

DERIVADOS FINANCIEROS

DESCRIPCIÓN DE MERCADOS Y TÉCNICAS
DE VALORACIÓN DE PRODUCTOS DERIVADOS

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CÁLCULO
ESTOCÁSTICO Y MOVIMIENTO BROWNIANO

por

DIEGO JARA

DIRECTOR QUANTIL S.A.S.
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - FACULTAD DE ECONOMÍA

Publicación preliminar como notas del curso

RIESGO Y VALORACIÓN DE DERIVADOS

Bogotá

Universidad de los Andes

Mayo 2017

Índice

Prefacio

Mucho se ha hablado y escrito de la crisis financiera mundial que comenzó en el 2007, y que aún cuando se escriben estas notas tiene ecos de proporciones nacionales alrededor del globo. Esta crisis puso de rodillas los sistemas financieros de un gran número de economías desarrolladas. La causa de la crisis parece bien señalada, marcada, en esencia, en una glotonería crediticia causada por tres factores:

- Excesos de liquidez generados por bancos centrales alrededor del mundo como respuesta a recesiones al comienzo de la década, y justificadas por una ausencia notable de elementos inflacionarios. Temas políticos adicionales como el afán generalizado de que todos los ciudadanos de un país tuvieran propiedad residencial ayudaron a relajar aún más los escasos diques que contenían las inundaciones monetarias.
- Una complacencia generalizada con respecto a riesgos crediticios y de mercados presentes en un número muy alto de instituciones financieras; en particular, muchos libros de los más prestigiosos bancos del mundo mostraban de forma explícita los riesgos que eventualmente fueron catalogados como obvios, pero que en el momento de evaluación se vieron administrados por directores que no podían darse el lujo de quedar atrás de su competencia en utilidades, y presencia de mercado.
- Una sofisticación de los instrumentos usados para transportar estos riesgos de una institución a la siguiente. Esto debe corregirse: la causa de la crisis no puede achacarse a la sofisticación de los instrumentos, sino debe sentarse en la falta de sofisticación de los métodos de evaluación de los riesgos de estos instrumentos. Por un lado, las mismas instituciones "independientes", encargadas de limpiar el sistema de riesgos extremos mediante su mandato de calificación oportuna y precisa de los instrumentos mencionados ofrecieron un sello de garantía de la explosión que estaba fabricándose. Por otro lado, el sistema no estaba preparado para el colapso inevitable del mercado. La fe casi dogmática que inundaba el mercado de que el riesgo había sido perfectamente disperso en el sistema cayó como un castillo de naipes tan pronto se entendió que en realidad nadie podía decir a ciencia cierta, ni siquiera con un grado mediocre de incertidumbre, en dónde residían estos riesgos mudos. En un comportamiento característico de mercados financieros, el exceso de confianza dio paso casi de inmediato a una total falta de confianza. Instituciones pasaron de prestar plata sin cuestionar la calidad crediticia de sus prestamistas, a negarle cantidades pequeñas a las instituciones financieras más respetadas del mundo.

Es factible pensar que solo el tercer punto es particular a esta época; por lo menos en la magnitud observada. Paso natural siguiente de muchos comentaristas del episodio fue dirigir la culpa a los modelos matemáticos subyacentes, los cuales parecían dar una sensación de tranquilidad a los participantes mientras fallaban en capturar las verdaderas fuentes de riesgo. Podemos en retorno crear una analogía en la que se culpa al motor de combustión interna cada vez que un conductor de automóvil se estrella.

En palabras de técnicos que tenían como tarea rescatar este Titanic, sería un verdadero desperdicio dejar pasar esta crisis. En particular, y comenzando a tomar el tema de este curso, sería un desperdicio no dejar bien claras las lecciones aprendidas. Una de ellas es la necesidad de entender los modelos que se utilizan en la administración de portafolios financieros. Es contraproducente abogar por una disminución en el uso de instrumentos sofisticados, así como sería un absurdo abogar por la prohibición de los automóviles para evitar accidentes. Es posible que sí deba existir una prohibición (y en este punto están, y seguirán por varios años, discutiendo las autoridades reguladoras de todas las economías capitalistas), pero sería más sensato dirigir los esfuerzos a forzar un entendimiento de los modelos y supuestos usados en la valoración de un derivado, en el cálculo de la duración de una nota, en el uso de correlaciones entre activos aparentemente independientes.

Estas notas forman la base del curso de la Maestría de Economía de Valoración de Derviados. El curso está dirigido a discutir algunos de estos modelos y supuestos, con la expectativa de dar al lector bases para poder identificar los puntos claves en modelos financieros. La discusión pasará de lo teórico a lo práctico y de vuelta, y tomará varios mercados como fuentes de ejemplos. Considerando la audiencia del curso como representativa de una Maestría de Economía en la Universidad de los Andes, se hará frecuente énfasis en el caso colombiano, mirando sus particularidades, presentando sus idiosincrasias, y contrastando su funcionamiento contra el de otros mercados.

1. Introducción

El mundo de los derivados avanza y se transforma continuamente. Esto es magnificado en mercados en vías de desarrollo como el colombiano, donde la misma estructura de los instrumentos se redefine constantemente, como buscando un centro de equilibrio sobre el cual maximizar la atención de los mercados.

En el caso específico de Colombia, en la década de los 2000 se plantaron las semillas para el desarrollo de un mercado robusto de derivados, y en la década de los 2010 se ha exhibido una relativa maduración de estas semillas, en ocasiones trayendo cambios en el *status quo*. Por ejemplo, la caída de la firma Interbolsa a finales del 2012 trajo consigo una revisión general de la regulación existente, provocando cambios importantes en los mercados de liquidez (repos, simultáneas y TTVs), de fondos de inversión, y de custodios de activos, entre otros.

Ahora, Colombia ha evolucionado su mercado de derivados indudablemente. Tan solo el inventario de productos es prueba de este crecimiento. En el 2005, el mercado local podía observar forwards de peso-dólar, pero el resto de derivados era ofrecido por el mercado externo, u operaba de forma privada, con poca transparencia, bajo volumen, y liquidez casi nula. En cuestión de una década se han agregado al mundo *plain vanilla* observable las opciones y futuros sobre peso-dólar, los NDFs, opciones y futuros de TES (nocional e individual), swaps IBR, futuros sobre el índice COLCAP y sobre acciones individuales, futuros sobre electricidad, futuros de IBR y opciones estandarizadas sobre TRM y futuros de acciones. En adición, productos tales como swaps de inflación, entre muchos otros, se mantienen en las miras de los encargados del desarrollo de mercados.

Estas notas desarrollan el tema de valoración de derivados como apoyo para el curso RIESGO Y VALORACIÓN DE DERIVADOS de la Maestría de Economía, el cual he dictado por un puñado de años en la Universidad de los Andes. El recorrido comienza en el Capítulo 2 con una descripción de los productos derivados más comunes (y, casi por asociación, más simples): forwards, futuros, opciones call y opciones put. Se hace un énfasis especial en los productos ofrecidos en Colombia, reconociendo éste como el mercado referencia de los estudiantes del curso. En el Capítulo 3 se toca superficialmente el ambiente de las plataformas sobre las cuales se operan los derivados.

Es en el Capítulo 4 en donde se establecen los elementos conceptuales para poder desarrollar la valoración de estos instrumentos de forma que se respeten ciertas reglas de juego. En particular, se axiomatiza el terreno de análisis con el supuesto de que no existen oportunidades de arbitraje, lo cual permitirá limitar el rango de acción del precio de los derivados. Sin embargo, hasta este punto no se habrá hecho alusión a la dinámica de evolución de los activos subyacentes; se observará que se puede hacer bastante sin un modelo, tal como valorar forwards, pero no se puede terminar la tarea: la valoración de opciones exige la definición de un modelo para la evolución del precio de activos subyacentes. El Capítulo 5 propone un paradigma, considerando inicialmente la mínima riqueza estocástica posible, que es ofrecida por el modelo binomial de un periodo. Este paso permitirá terminar la tarea de valorar opciones call y put, pero abrirá una caja de Pandora, al exigir modelos para poder valorar derivados. El resultado de esta valoración reflejará si el modelo adecuadamente refleja la realidad observada con posterioridad. Así, a pesar de que el modelo binomial permite establecer la metodología de valoración (en esencia, mediante la replicación de los flujos de caja de los derivados), prontamente se evidenciará la necesidad de producir modelos más sofisticados. Este mismo capítulo ofrece extensiones naturales, agregando periodos de tiempo y distintas ramificaciones del árbol.

Hasta este punto se habrá mantenido una perspectiva discreta sobre la evolución de los precios de los activos subyacentes. El salto a modelos continuos exige una presentación de la teoría del Cálculo Estocástico, la cual se exhibe en el Capítulo 6. Considerando el objetivo que se traza en estas notas, se presentarán los puntos necesarios para continuar con el tema de valoración de derivados: Movimiento Browniano, Integral Estocástica, Lema de Itô, y Teorema de Girsanov. Con estas herramientas, el Capítulo 7 procede a analizar la dinámica de portafolios desde una perspectiva de tiempo continuo para, estableciendo modelos basados en el Movimiento Browniano para los activos básicos, proceder a resolver el problema de valoración de derivados. Nuevamente, la premisa de arranque será la ausencia de arbitraje en el mercado, y nuevamente la estrategia será construir portafolios replicantes.

Finalmente, el Capítulo 8 introduce al lector al análisis de riesgos de productos derivados, enfocando la discusión en la definición y características de las *griegas* - variables que miden la sensibilidad del precio de un producto (o portafolio) al movimiento de variables subyacentes.

2. Derivados *Plain Vanilla*

No existe una definición exacta de los derivados *plain vanilla*[1], aunque se pueden tomar elementos mínimos sobre los que puede contextualizarse este concepto: en general un instrumento financiero es *plain vanilla* si es una versión simplificada, o estandarizada del instrumento mencionado. Para efectos de presentación, en esta exposición se considerarán derivados plain vanilla los forwards genéricos, futuros, opciones genéricas call y put, y swaps de tasas de interés. En esta sección se trabajará con los primeros cuatro, dejando la discusión de swaps para un capítulo posterior.

2.1. Forwards

Un *forward* es un contrato bilateral, en donde una de las dos partes (la parte *larga*) se compromete a comprarle a la otra parte (la parte *corta*) una cantidad dada (nocional) de un activo básico dado (subyacente) por un precio unitario dado (precio *forward*, o *strike*) en una fecha futura dada (expiración).

Una palabra clave es "compromete": en efecto, las dos partes están obligadas contractualmente a llevar a cabo la compra-venta pactada. Ahora, hay dos alternativas de liquidación al pactar este tipo de contratos:

- **Liquidación Física**. Esta modalidad, que también recibe el nombre de *Delivery Forward* (o DF) sigue textualmente la definición planteada, forzando a la parte corta a entregar el bien pactado a la parte larga a cambio de un pago preestablecido. Las condiciones de entrega del bien (y del pago) deben quedar claramente establecidas en el contrato: ¿Dónde puede hacerse la entrega? ¿Cuándo puede entregarse el bien? ¿Qué características mínimas debe satisfacer el bien entregado? Claramente, diferencias en estas especificaciones tienen repercusiones financieras importantes para las partes: no es igual para un comprador chino recibir carbón en Santa Marta que recibirlo en Buenaventura.
- **Liquidación Financiera**. Estos NDFs (o *Non Delivery Forwards*) siguen la definición planteada hasta el momento de expiración del contrato, momento en el cual se compara el precio pactado contra el precio de mercado del subyacente; se calcula la diferencia entre los dos precios, y multiplicando por el nocional obliga a la parte perdedora a hacer un pago puntual a la ganadora. Esta modalidad facilita la necesidad de precisar las condiciones de entrega del subyacente, pero introduce otra dificultad: ¿Cómo se determina el precio de mercado? Si el subyacente es una acción líquida, un TES, o una tasa de cambio, es posible acordar usar el punto medio de las pantallas transaccionales en algún momento específico. Pero si el subyacente es un bono corporativo ilíquido, un cargamento de azúcar refinado, o carbón coque,

[1] El autor desconoce de traducciones establecidas para ciertos términos del mundo de los derivados. Nombres tales como strike, forward, call, put, in-the-money, bull spread, etc., serán referidos por su nombre en inglés.

no es inmediatamente clara la forma de determinar el precio del subyacente en el momento exacto de expiración.

Ejemplo 1. Forwards COP/USD. La década del 2000-2010 fue escenario para el desarrollo en Colombia del mercado de NDFs sobre la tasa de cambio COP-USD. La gráfica 1 muestra el volumen mensual transado en este tipo de instrumentos en el mercado colombiano. Siendo contratos con liquidación financiera, el mercado ha adoptado la convención de usar la TRM como subyacente. La TRM es un promedio de transacciones del día anterior, luego existe un rezago de un día entre el subyacente y la tasa de cambio. Sin embargo, usar la TRM trae varias ventajas: es una variable bien difundida y aceptada por el mercado como tasa de referencia, y es fácilmente observable, por lo que tiene muy poca posibilidad de ser rechazada por participantes del mercado. Es interesante notar que

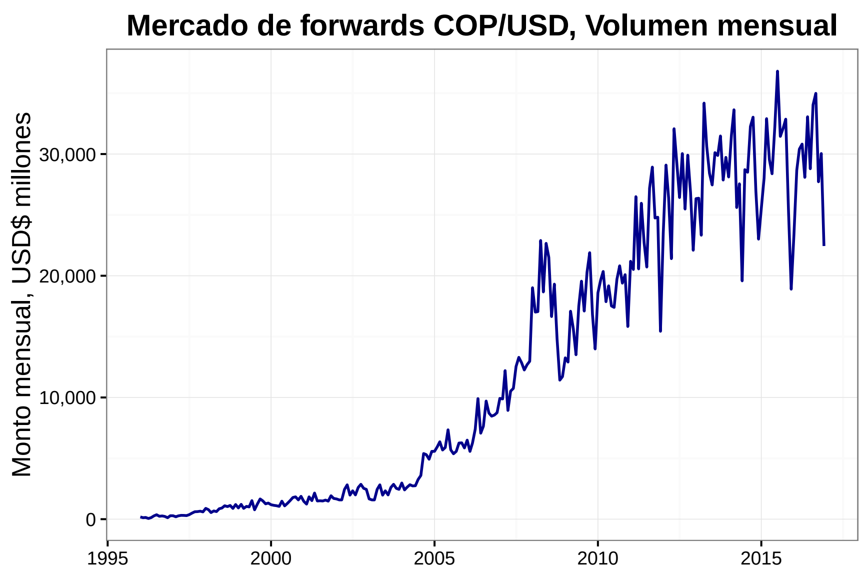

Figura 1: Volumen forwards COP/USD, enero 1997 - enero 2017. Fuente: www.banrep.gov.co.

el crecimiento del mercado parece haberse estabilizado en el 2011, evidencia posible del desarrollo de este mercado, que es el más evolucionado en el universo del mercado de derivados colombiano. Vale la pena tomar como ejemplo el mercado el 10 de marzo de 2011, día para el cual la TRM era 1867.5. El mercado de NDFs ese día está expuesto en la Tabla 1. Consideremos un importador que debe hacer un pago de USD$1 millón tres meses después de la fecha de observación. Según este mercado, el importador podía protegerse contra la devaluación del peso comprometiéndose a comprar cada dólar por COP$1853.7 en el momento de pago de la importación. Es decir, podía asegurar una revaluación (anualizada) de casi 3 % por medio de estos contratos. Ahora, estos contratos no son de liquidación física, luego en el momento de expiración el importador debe salir a conseguir los dólares que debe pagar: este contrato solo le ofrece poder comprarlos a la tasa pactada. Por ejemplo, si al cabo de tres meses la TRM cae a 1800, el importador pierde COP$53.7 millones en el derivado, pero puede ir a comprar los dólares a mercado, por COP$1,800 millones, pagando un total de COP$1,853.7

Curva COP/USD forward Marzo 10, 2011			Curva COP/USD forward Enero 30, 2017		
Meses 0	1867.5	Devaluación Implícita	Meses 0	2925.2	Devaluación Implícita
1	-6.0	-3.86 %	1	14.9	6.10 %
2	-11.0	-3.54 %	2	28.9	5.90 %
3	-13.8	-2.97 %	3	43.15	5.86 %
4	-13.7	-2.21 %	6	80.9	5.46 %
5	-13.6	-1.75 %	9	118.9	5.31 %
6	-13.5	-1.45 %	12	156.9	5.22 %
12	2.8	0.15 %	18	209.9	4.62 %
24	80.0	2.10 %	24	268.6	4.39 %

Cuadro 1: Puntos forward para el mercado de NDFs de COP/USD, marzo 10, 2011. Fuente: Bloomberg.

millones por el millón de dólares. De forma análoga, si la TRM sube a 1900, el importador gana COP$46.3 millones en el derivado, pero ahora tendría que pagar COP$1,900 millones por los dólares, causando un pago neto de COP$1,853.7 millones. De esta forma, el derivado le fija el pago neto por sus dólares.

El hecho de que el mercado estaba dispuesto a pactar a futuro tasas por debajo de la TRM (a pesar de que las tasas en dólares en ese momento eran cerca de 3 % por debajo de las tasas en pesos) obedece a idiosincracias del mercado colombiano (ver capítulo 4). Como comparación, se muestra el mercado en enero 30, 2017, y se observan devaluaciones más acordes con diferenciales de tasas en pesos y dólares.

Contratos forward se transan alrededor del mundo sobre una amplia variedad de subyacentes, notablemente tasas de cambio, commodities, tasas de interés y bonos. En adición a la TRM, en Colombia se transan forwards sobre TES y tasas de interés, aunque estos mercados palidecen en términos de volumen con el de tasa de cambio. No obstante, aún siendo el mercado de derivados más desarrollado en Colombia, su funcionamiento se puede ver afectado por fricciones fuertes causadas por el entorno regulatorio, como se exhibió en el ejemplo anterior.

Otro tema importante en la definición de un forward, que está presente en general en los derivados transados en el mercado Over-the-Counter, u OTC[2] (es decir, los que no transan en bolsa), es la formalización del derivado: una cuestión es lo que dice el contrato que cada parte debe hacer, pero otra es que las partes efectivamente estén en capacidad (o con la voluntad) de cumplir su compromiso. Este riesgo de contraparte puede mitigarse con cláusulas de provisiones de crédito; en general es un riesgo muy importante en el estudio y operación de derivados.

Finalmente, es importante notar la distinción entre el precio forward, que es el precio contractual

[2] ver Capítulo 3

con el cual se realizará la liquidación final, y el precio del forward, que hace referencia al valor del contrato como tal. Típicamente los forward (y muchos otros derivados: swaps y credit default swaps, por ejemplo), se pactan de tal forma que ninguna de las dos partes deba hacer un pago inicial a la otra. La interpretación es que el valor inicial del contrato es 0. Sin embargo, una vez se negocia y confirma el contrato, el valor del contrato forward varía con el movimiento de las variables de mercado. Este instrumento financiero puede tener valoración positiva o negativa, según las condiciones del mercado, contrario al precio forward, que representa el precio al que se comprará el activo subyacente.

2.2. Futuros

Un *futuro* es un contrato muy similar al forward, diferenciándose en el hecho de que es un instrumento transado en una bolsa organizada. Como tal, un contrato futuro es estandarizado; es decir, sus características son definidas por la bolsa donde transa, y no se pueden ajustar a preferencias individuales, como en el caso de los forwards. En adición, la operación en futuros está regida por las reglas de la bolsa; en particular, un operador de futuros maneja una cuenta de margen, mediante la cual la bolsa disminuye casi en su totalidad el riesgo de contraparte que se mencionó en la sección anterior. Financieramente, los futuros difieren de los forwards en la marcación diaria: cada día las posiciones en futuros son marcadas a mercado. Es decir, se reconocen inmediatamente las pérdidas o ganancias en la cuenta de margen, y el contrato se ajusta (mediante su precio futuro) para volver a tener un valor de 0 (ver la discusión de cuentas de margen en el capítulo 3).[3]

Esta eliminación del riesgo de contraparte y la estandarización de los productos contribuyen a que se generen mercados de gran profundidad y liquidez. En las bolsas más grandes se transan futuros de commodities (productos energéticos, productos agrícolas, materias primas industriales), de tasas de interés y bonos, de índices accionarios y de acciones individuales.

Otra característica diferenciadora es el cierre de una posición. En el mundo OTC, un contrato debe contar con la aceptación específica de la contraparte para poder ser deshecho; existe la posibilidad de buscar la posición contraria con otra contraparte, aunque esto no cierra completamente la posición: el riesgo de contraparte ahora se tiene con dos entidades. En las bolsas, las posiciones se cierran transando la dirección opuesta. Esto es consecuencia de que la contraparte sea efectivamente la bolsa. En los casos de futuros con entrega física, es típico encontrar participantes que no tienen interés en realizar el proceso de entrega. La forma en que operan es haciendo un *roll* de su posición (es decir, aplazando la expiración) o cancelando su posición tomando la dirección opuesta.

[3] Este PyG se calcula con la diferencia entre el preico futuro pactado inicialmente y el que se pactaría en el momento de valorar la posición. Este es un cálculo aproximado del verdadero PyG, que debería incluir una noción del valor presente de esa diferencia, pero la simplificación facilita la operatividad en la administración de las garantías.

Los futuros son transados en parte por productores, traders, y consumidores, típicamente con el fin de cubrir exposiciones al movimiento de precios de ciertos productos. En algunas ocasiones (de hecho, normalmente), las características del producto que se quiere cubrir no son idénticas a las de los subyacentes de los contratos futuros. Esta diferencia genera un riesgo de base (o *basis*). Típicamente puede entenderse como la diferencia entre el precio spot del producto, y el precio futuro usado. Volatilidades bajas de la base indican coberturas apropiadas, y volatilidades altas indican que la cobertura puede no ser muy eficaz.

Ejemplo 2. Futuros de TES. Hacia finales de la década 2000, la Bolsa de Valores de Colombia ofreció al mercado colombiano el contrato de futuros sobre canastas de TES, a lo que se denominaba el TES Nocional. Sin embargo, hacia el 2013 la BVC introdujo los futuros sobre TES individuales, atendiendo peticiones del mercado basadas en la aparente complejidad del TES Nocional; desde entonces el mercado del TES Nocional decreció hasta casi desaparecer, y el de TES individuales se ha afirmado. Pero es interesante explorar los detalles de definición de ese TES Nocional; en esencia introducía elementos de opcionalidad que permitían al mercado abrirse paso hacia operaciones de opciones y volatilidades. El funcionamiente se exhibe a continuación, y detalles como ciclos de expiración y nocional de los contratos se mantienen en los contratos individuales.

Los ciclos de expiración siguen los ciclos de futuros de bonos en Estados Unidos: existen expiraciones para marzo, junio, septiembre y diciembre, y se listan los siguientes meses seriales (es decir, en marzo se listan expiraciones de abril, mayo, junio, y septiembre). Para cada expiración se listan futuros para tres partes de la curva: corto plazo (alrededor de dos años), mediano plazo (alrededor de cinco años) y largo plazo (alrededor de diez años). El día de entrega es el primer viernes del mes de vencimiento. Sin embargo, el contrato deja de transarse en bolsa el último miércoles antes de su vencimiento, y es en este día en que la parte corta debe anunciar el bono que decide entregar.

Un contrato tiene un valor de COP\$250 millones: este es el nocional del subyacente en estos futuros. Ahora, el nocional en estos futuros (y así ocurre con muchos otros subyacentes) se escoge de una canasta de posibles entregables. A cada futuro corresponde una canasta compuesta por dos TES (que expiran alrededor del plazo relevante). El contrato especifica entrega física: el vendedor del futuro debe escoger uno de los dos TES en la canasta para entregar, a cambio de recibir un precio dado según las condiciones del futuro.

Ahora, dado que para dos TES con similar madurez, el de menor cupón tiende a tener menor precio, pareciera que la parte corta siempre escogería el TES de menor cupón para entregar. Para agregar relevancia a los TES de cupón más alto, estos contratos establecen que la parte larga debe pagar un precio más alto por aquéllos bonos con cupón más alto, según una corrección al precio futuro pactado mediante el *Factor de Conversión*. El Factor de Conversión es el precio de cada TES (usando un nocional de \$1, y una fecha de valoración igual al último de dia de transaccion), suponiendo una tasa de mercado dada (en la actualidad, 10 % para el futuro de TES de corto plazo).[4] La idea es que la tasa usada para encontrar este factor represente las tasas de cada parte de la curva, aunque la intención es no cambiar muy frecuentemente este parámetro.

Por ejemplo, los entregables del futuro de TES con expiración mayo 2011, y sus factores de conversión, se muestran en la tabla 2. Por referencia, para marzo 30, 2011, el precio de cierre de este contrato fue 105.905. Al dividir los precios limpios por los factores de conversión correspondientes, se puede intuir que será más favorable entregar el TES de 2012 que el de 2013. Como se mencionó antes,

Madurez	Cupon	Factor de Conversión (FC)	Precio Limpio, Marzo 30, 2011 (PL)	$PL - FC * \Phi$
15-Aug-12	9.25 %	0.990221	105.422	0.5526
17-Apr-13	6 %	0.93168	99.784	1.1144

Cuadro 2: Canasta de entregables para el futuro de TES de corto plazo con expiración mayo 2011. Fuente: www.bvc.com.

el precio pagado el día que se entrega el bono depende del TES que se entrega. La fórmula para calcular el precio pagado por la parte larga es $FC \times \Phi + CA$, donde FC es el factor de conversión del TES, Φ es el precio futuro final (el precio de cierre del último día de transacción) y CA es el cupón acumulado del TES correspondiente, calculado en la fecha de entrega. Naturalmente, la parte corta escogerá el TES para el cual la cantidad $PL - FC \times \Phi$ es menor, donde PL es el precio limpio del TES en el momento de entrega; la tabla muestra este valor, que recibe el nombre de *base bruta* (*gross basis*), para cada TES, y se observa que los “Agosto 12s” se perfilaban como la opción más barata para entregar. Esta característica le ofrece a la parte corta una opción, cuyo valor está implícito en la formación del precio futuro. Como se verá en el capítulo 3, el manejo de la cuenta de margen evita la necesidad de mantener “memoria” del precio futuro pactado inicialmente; el único precio relevante para la liquidación final es el último precio de cierre del futuro.

Por otra lado, es interesante notar que Φ se fija dos días antes de la entrega del TES. Como se verá después, esto tiene como efecto un cambio en la sensibilidad del futuro a los movimientos de la curva.

Ejemplo 3. Futuros de Café, Contrato C. ICE (Intercontinental Exchange) lista futuros de café arábigo lavado, denominados contratos C. Se listan contratos para marzo, mayo, julio, septiembre y diciembre; la entrega puede ocurrir a lo largo del mes listado, aunque la notificación de entrega debe hacerse anticipadamente. El subyacente es escogido por la parte corta entre una canasta de cafés de distintas regiones del mundo. Para ajustar por posibles diferencias de calidad, o por entregas en distintos puertos, se incluyen penalidades o bonificaciones. Por ejemplo, si el café entregado es colombiano, la parte larga debe pagar una bonificación de 2 centavos de dólar por libra por encima del último precio de cierre del contrato. Hasta el 2008 era común observar que el café colombiano

[4] A comienzos del 2011, este precio se calculaba usando un conteo de días ACT/365, distinto al usado para valorar TES, que es NL/365. Esto como tal no trae diferencias importantes al momento de transar el futuro, pero era interesante esta diferencia.

tenía un precio de unos pocos centavos por encima de cafés genéricos. Sin embargo, desde ese año se presentaron choques a la oferta del café colombiano que enviaron este *diferencial* a niveles nunca antes visto (tocando los 100 centavos). En esta situación, es claro que la parte corta no escogería café colombiano para ser entregado en el contrato.

Un contrato se ejecuta sobre 37,500 libras, y su precio es listado en centavos de dólar por libra. La figura 2 muestra dos años de evolución del precio del contrato con expiración marzo 2017.

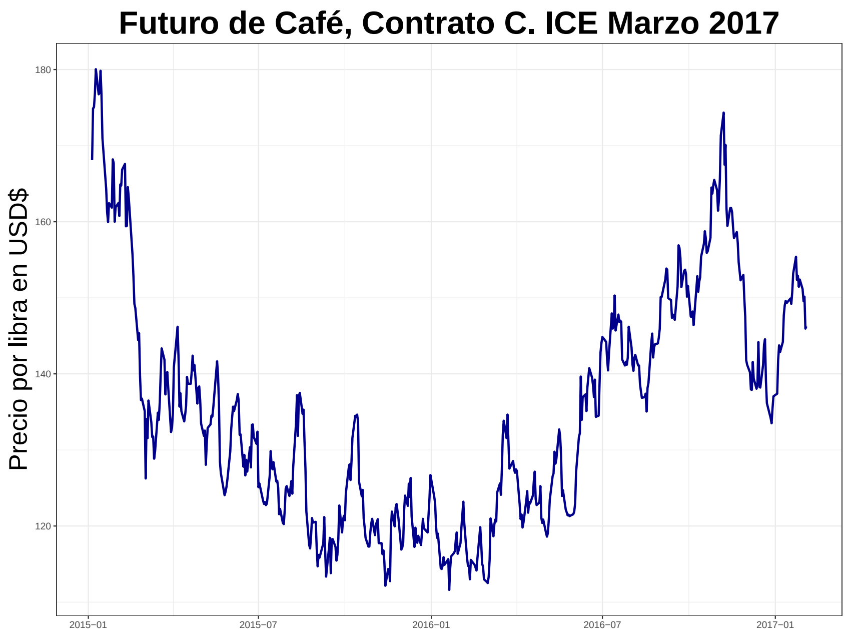

Figura 2: Precio de Contrato C con expiración marzo 2017. Fuente: www.theice.com.

Ejemplo 4. Futuros de Tasas de Interés. El mercado más profundo de futuros de tasas de interés es el de futuros de LIBOR (que es la tasa en la que se basó el diseño de la IBR), llamados futuros de Eurodólares.[5] Estos futuros son ofrecidos por CME, tienen liquidación financiera, y el subyacente es un "préstamo" LIBOR de 90 días. Ahora, la tasa subyacente es la tasa LIBOR de 3 meses, y es a la que converge el contrato, y con la que se marca a mercado el contrato. Las expiraciones de los futuros son trimestrales, obedeciendo el calendario de marzo, y de forma líquida transan los primeros tres a cinco años. En adición, normalmente se listan los seriales (expiración en el siguiente mes).

La cotización de estos futuros se ofrece al mercado mediante precios, por consistencia con el mercado de bonos. Así, una cotización de 97.00 significa una tasa futura pactada de 3 %. Cada contrato tiene un nocional de USD$1 millón; luego un movimiento de 0.01 % en la tasa futura implica un cambio de USD$25 en la marcación de un contrato (dado que se toman 90 días como

[5]Este confuso nombre pretende hacer alusión a la naturaleza de LIBOR, que es una tasa de préstamos en dólares que pactarían bancos en Europa.

periodo del préstamo subyacente, y el conteo de días de LIBOR es ACT/360). Una interpretación útil se presta a partir de la noción de préstamo: un agente que esté largo el contrato se beneficia si la tasa subyacente baja, que equivale a una posición en la que el agente se ha comprometido a prestar dólares (dado que ya pactó una tasa alta, disminuciones en las tasas representan un beneficio en la medida en que salir a pactar un préstamo futuro en el nuevo mercado con tasas bajas representarían menos ingreso por intereses). De forma análoga, un agente con una posición corta en futuros de Eurodólares está en la posición equivalente de comprometerse a pedir prestados dólares en el futuro a una tasa pactada con anterioridad.

La BVC lanzó al mercado los futuros de IBR en junio del 2012. Aunque la IBR ha sido diseñada para imitar LIBOR, los futuros son definidos de forma distinta, considerando que el índice de referencia en el mercado es el IBR a un día. Originalmente, las expiraciones de los contratos, que son liquidados financieramente, se daban el primer viernes del mes de vencimiento (siguiendo el calendario marzo-junio-septiembre-diciembre). Sin embargo, posteriormente se cambió esta especificación para permitir expiraciones de 1, 3, 6, 9, 12 y 18 meses cada día de operación.[6] Al expirar un contrato, cuyo monto unitario se define como COP$1,000,000,000, el precio final del contrato se calcula como $100 - R$, donde R es el retorno durante la vigencia del contrato (los últimos 360 días para la versión original del contrato) de una cuenta que tuviera rendimientos diarios compuestos con la IBR overnight.

A manera de ejemplo se toma un contrato de 3 meses con expiración febrero 17, 2017. El subyacente de este contrato es una cuenta que acumula la tasa IBR desde noviembre 17, 2016[7]: cada día hábil la cuenta se multiplica por una cantidad $1 + r \times \frac{d}{360}$, donde r es la tasa IBR vigente, y d es el número de días calendario desde el último día hábil. Así, si la cuenta inicialmente arranca con COP$100, tomando la IBR de 7.362 % para el cierre de noviembre 17 se llega a que el 18 de noviembre la cuenta vale COP$100.02044. Un agente observa el mercado la mañana del 3 de febrero de 2017, y calcula que esta cuenta virtual vale COP$101.5783, considerando la historia de la IBR. Ahora, el agente observa que el contrato transa a un precio de 92.75, equivalente a un rendimiento total de 7.25 %, lo cual exigiría una acumulación final de COP$101.8697 en febrero 17. Suponiendo un IBR constante en lo que resta del periodo, este número debería ser 7.365 %, con lo cual puede basar una decisión de inversión: por ejemplo, si el agente duda que en las dos semanas restantes la IBR suba del nivel de 7.135 % visto el 3 de febrero, entonces interpreta el precio de 92.75 como muy bajo, y debería compar el contrato.

[6] Este diseño dificulta la transacción de contratos, ya que un contrato operado hace algunos días no tiene contraparte en el mercado de hoy (forzando a esperar hasta que la fecha de operación permitiera la compra o venta exacta de ese contrato). Esto puede ser indeseable para instituciones que buscan liquidar sus contratos antes de su expiración.

[7] El swap subyacente tiene fecha inicial dos días hábiles después de su operación (es $t + 2$), luego en este ejemplo la operación se cerró el 15 de noviembre.

Caso Colombia El universo de futuros vigentes en el mercado colombiano en el 2017 se completa con futuros de TRM, futuros del índice accionario COLCAP, y de las acciones más líquidas de la bolsa (Ecopetrol y Preferencial Bancolombia, por ejemplo), futuros del índice de inflación (con muy poca transabilidad) y futuros de electricidad. Los mercados de acciones están en una infancia con respecto a su liquidez y profundidad, pero los de TRM y TES presentan una dinámica interesante, aunque no necesariamente creciente; las figuras 3 a 6 muestran los volúmenes (en pesos y cantidad de contratos) de algunas familias de futuros. Sin embargo, la expectativa es que una vez las instituciones financieras escalen el esfuerzo inicial (sistemas, contabilidad, agentes operadores, etc.), se observará una consolidación de estos mercados como instrumentos de cobertura, inversión y especulación.

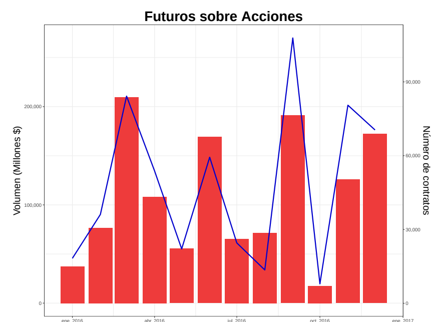

Figura 3: Volumen de futuros de acciones, 2016. Un contrato = 1,000 acciones. Fuente: www.bvc.com.

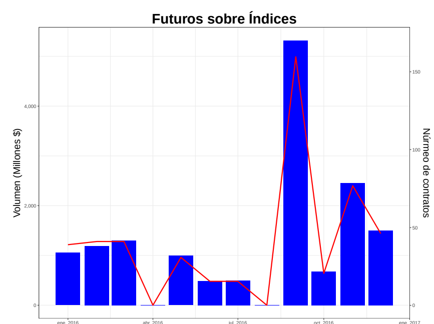

Figura 4: Volumen de futuros del COLCAP, 2016. Un contrato = 25,000 unidades del índice. Fuente: www.bvc.com.

Otros subyacentes están en la mira de las bolsas: *cross-currency swaps*, por ejemplo. Es natural esperar que el universo de subyacentes crecerá en la medida en que los mercados ya establecidos tomen fuerza en volumen y liquidez.

2.3. Opciones Call

Una *Opción Call* es un instrumento financiero que le otorga a su dueño (la parte *larga*) el **derecho** de comprar una cantidad dada (nocional) de un activo básico dado (subyacente) por un

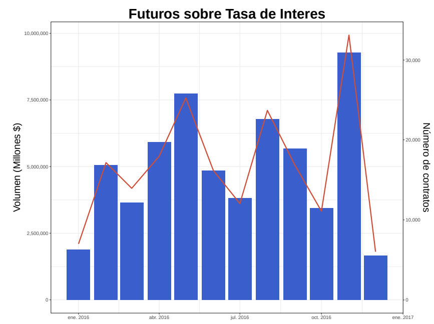

Figura 5: Volumen de futuros de TES, 2016. Un contrato = $250,000,000 de nocional. Fuente: www.bvc.com.

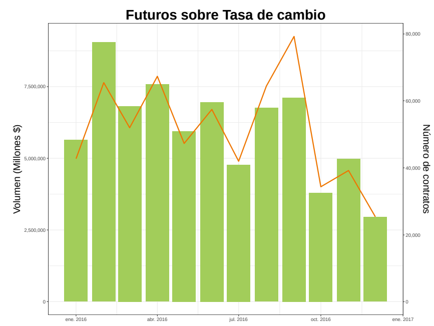

Figura 6: Volumen de futuros de TRM, 2016. Un contrato TRM = USD$50,000 de nocional. Fuente: www.bvc.com.

precio unitario dado (*strike*) en una fecha futura dada (expiración). Estos instrumentos transan en bolsas organizadas, o en el mercado OTC, mediante contratos bilaterales. La parte corta es la que vende la opción; es decir, es la que le cede el derecho a la parte larga. Por ceder este derecho, la parte corta recibe una *prima* que es pagada por la parte larga, típicamente en el momento de negociar la opción.

La palabra clave en esta definición, al contrastarla con la definición de un forward, es "derecho": el dueño de la opción tiene la posibilidad de escoger no comprar el subyacente. Si la decisión es activar el derecho a comprarlo, se dice que se *ejerce* la opción. Genéricamente, en el mundo plain vanilla existen dos tipos de opciones call: *europeas*, en las cuales la opción solo puede ejercerse en el momento de expiración (este momento típicamente se define como el día de expiración), y *americanas*, en las cuales la opción de compra puede ejercerse en cualquier momento antes de su expiración.

En el momento de expiración de una opción call, su dueño hará uso del derecho si el precio del subyacente se encuentra por encima del strike. En caso contrario, le es más beneficioso ir directamente al mercado y comprar el subyacente a un precio más bajo. Así, en términos financieros netos, el beneficio que el dueño de una opción call recibe en el momento de expiración T es $\max(0, S(T) - K) = [S(T) - K]^+$, donde $S(t)$ es el precio del subyacente en el tiempo t, y K es el strike de la opción. La figura 7 grafica cualitativamente este pago final.

Figura 7: Pago final de una opción call; no se considera el pago de la prima.

Al igual que con el mercado de forwards y futuros, una opción puede tener liquidación financiera o física; típicamente el mercado de opciones se diseña con base en el mercado de forwards (o futuros); es decir, si un forward se liquida físicamente, entonces la opción sobre el mismo subyacente también tenderá a ser liquidado físicamente. Un mercado de opciones naturalmente evoluciona después del de forwards o futuros, y puede entenderse necesaria la existencia del segundo para poder tener el primero. Es por esto que en Colombia el único mercado de opciones que en el 2017 tiene alguna profunidad es el de tasa de cambio, si bien cabe notar que existen mercados de opciones en TES y se espera la introducción de opciones estandarizadas (operadas en bolsa) para futuros de acciones, futuros de TES y futuros de TRM.

Ejemplo 5. Opción Call sobre la TRM. El 24 de octubre de 2016, la TRM vigente era $2944.25. Ese día una opción call sobre la TRM, con Strike $3,000 y expiración enero 24, 2017 (tres meses) podía comprarse por un precio aproximado de $89. Esta es la cantidad que debía desembolsar el comprador de la opción el 24 de octubre por adquirir el derecho de comprar un dólar por $3,000 en el momento de expiración. En realidad, la liquidación es financiera, tal como el mercado líquido de NDFs sobre tasa de cambio. El 24 de enero, día en que la TRM fue fijada en $2908.53, el dueño de la opción optaría por no ejercer (en caso de hacerlo, perdería $91.47, en adición a la prima pagada inicialmente).

2.4. Opciones Put

Una *Opción Put* sigue la definición y consideraciones mencionadas para las opciones call, con una modificación importante: le otorga a su dueño el derecho de *vender* el subyacente. Así, en el momento de expiración de una opción put, su dueño hará uso del derecho si el precio del subyacente se encuentra por debajo del strike. En caso contrario, le es más beneficioso ir directamente al mercado y vender el subyacente a un precio más alto. En términos financieros netos, el beneficio que el dueño de una opción put recibe en el momento de expiración T es $\max(0, K - S(T)) = [K - S(T)]^+$, donde $S(t)$ es el precio del subyacente en el tiempo t, y K es el strike de la opción. La figura 8 grafica cualitativamente este pago final.

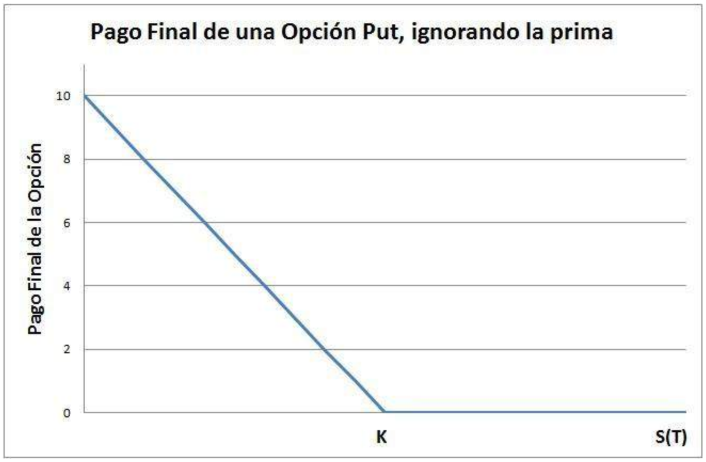

Figura 8: Pago final de una opción put; no se considera el pago de la prima.

3. Mercados

Los derivados se transan en mercados OTC (Over-the-Counter) y en bolsas organizadas. En el mercado OTC los participantes están en libertad de entrar de forma bilateral en los contratos que estipulan las características de los derivados. En general, en este mercado existe libertad para diseñar los contratos de forma personalizada, aunque esta personalización acarrea un costo para la parte interesada en términos de liquidez (y por lo tanto en términos de precio). Sin embargo, el mercado típicamente converge a una estandarización de productos, lo cual trae beneficios en liquidez y volumen transado, y reduce posibles fuentes de riesgo operativo.

Los contratos bilaterales enfatizan riesgo de incumplimiento de la contraparte, y ocasionalmente de interpretación de los mismos contratos. En caso de existir conflictos de interpretación, la autoridad final recae sobre las instancias marcadas para tal fin en la jurisdicción usada para celebrar el contrato. Para reducir este riesgo legal, distintos entes reguladores han hecho esfuerzos por estandarizar las definiciones usadas en los contratos. Por ejemplo, la Superintendencia Financiera de Colombia establece pautas mínimas que deben estar en un contrato marco local, en el capítulo XVIII de la Circular Básica Contable. En el ámbito internacional, el referente es el ISDA Master Agreement. Es importante notar que en general estos contratos son estandarizados hasta cierto punto, pero la firma es bilateral, lo cual permite que dos partes renegocien términos estandarizados, tales como postura de garantías u otras provisiones de crédito.

Las bolsas organizadas ofrecen al mercado productos derivados estandarizados; así, los productos allí transados tienden a ser plain vanilla: futuros, y opciones call y put. Los participantes que quieren acceder a ellos deben hacerlo bajo las reglas de negociación y operación de las bolsas. Distintas bolsas tienden a especializarse en distintos tipos de productos. En Colombia se tiene la Bolsa de Valores de Colombia y la Bolsa Mercantil Colombiana. Los derivados ofrecidos por la BVC a comienzos del 2017 (ver sección 2.2) son futuros de TES, futuros sobre el índice accionario COLCAP y sobre acciones individuales del índice, futuros sobre TRM, futuros de OIS (IBR), futuros de IPC y - mediante la plataforma DERIVEX - futuros de electricidad.

A nivel internacional, existen decenas de bolsas, algunas de ellas abarcando varias jurisdicciones. Algunos ejemplos son Chicago Board of Trade (CBOT), Chicago Mercantile Exchange (CME), InterContinental Exchange (ICE), New York Mercantile Exchange (NYMEX), Euronext.liffe, London Metals Exchange (LME), Tokyo Commodity Exchange (TOCOM), Bursa Malaysia, y Bolsa de Valores, Mercadorias & Futuros de Sao Paulo (BM&FBOVESPA).

Derivados transados por bolsa tienen la característica de enfrentar a los distintos participantes con un solo intermediario, que es el *Exchange* que organiza el mercado. Como tal, la bolsa no es comprador o vendedor neto de los contratos, sino intermediario. Así, cada instrumento transado tiene una parte larga y una corta, aunque para cada parte su contraparte es la bolsa. Para ser formales, típicamente una entidad (la bolsa, como tal) se enfoca en facilitar y promover las transacciones, y otra parte (la cámara de compensación) se responsabiliza de la compensación (neteo) y liquidación (cumplimiento) de los instrumentos. El riesgo de contraparte inherente a operaciones con derivados es eliminado casi en su totalidad mediante la cámara de compensación: esta cámara está formada por varios agentes liquidadores, quienes aportan capital para soportar la operación, y asumir pérdidas, en caso de existir. Para disminuir la posiblidad de pérdidas, la cámara maneja un sistema de cuentas de margen, en las cuales va marcando a mercado de forma diaria las posiciones de los participantes. En efecto, estas cuentas de margen sirven como garantía para el cumplimiento de los contratos.

Cuentas de Margen. La operación de una cuenta de margen comienza por el *margen inicial*, que es pedido a los participantes con la intención de cubrir posibles pérdidas futuras. En la medida en que el tiempo transcurre, y el mercado se mueve, los participantes van generando pérdidas y ganancias en sus portafolios. Éstas son reconocidas de forma diaria mediante la cuenta de margen: diferencias positivas en la valoración de instrumentos son consignadas en la cuenta, y diferencias negativas son deducidas de la cuenta. De esta forma, los contratos cierran el día valorados a mercado, y la contabilidad de pérdidas y ganancias se lleva a cabo con la cuenta de margen. Es decir, un portafolio de futuros vale $0 tan pronto se cierra el mercado y se balancean las cuentas. La “memoria” de sus rendimientos es llevada por la cuenta de margen. El PyG para futuros se realiza considerando la diferencia de precios futuros entre dos días consecutivos (o entre el precio de transacción y el de cierre para transacciones intradiarias). Luego para posiciones en contratos futuros cada marcación a mercado debe ser considerada como un *recouponing* del precio futuro pactado. Es decir, si un agente pacta un futuro de compra a 100 por una unidad de un subyacente dado, y el precio futuro sube a 102, se consignan 2 a la cuenta de margen del agente, y en adelante se considera que el agente está largo futuros pactados a 102 (y no a 100, como inicialmente se pactó); luego todos los agentes con posiciones abiertas en este contrato al cierre de un día transaccional comparten un mismo precio futuro, que es igual al precio de cierre. Las opciones se manejan considerando su precio de cierre.[8]

Ahora, la cámara gestiona el riesgo de incumplimiento con una solicitud de fondos en caso de que la cuenta de margen caiga por debajo de un *margen mínimo*, mediante un *llamado de margen*. Este llamado debe ser atendido de forma inmediata; de no hacerse así, la bolsa liquida las posiciones (las netea con operaciones contrarias), cubre las pérdidas con la cuenta de margen, y devuelve el restante (si sobra dinero). Típicamente los fondos en efectivo de las cuentas de margen generan rendimientos acorde con una tasa libre de riesgo, que en la mayoría de países significa la tasa del Banco Central. En ocasiones las bolsas aceptan otro tipo de instrumentos, además de efectivo, para fondear cuentas de margen (por ejemplo bonos soberanos); en estos casos los flujos de caja de los instrumentos se mantienen en la cuenta de margen, siendo reinvertidos a la tasa libre de riesgo.

Ejemplo 6. Manejo de Cuenta de Margen para una Posición de Futuros de TES. Las

[8] Aunque parece ser lo mismo, hay una diferencia fundamental: el PyG de los futuros se calcula con los precios futuros; es decir, con los precios de compromiso de compra o venta. En cambio, para las opciones se usan los precios del derivado como tal - en el caso de los futuros el precio del derivado es 0.

garantías exigidas para posiciones en futuros de TES se calculan como un porcentaje del monto subyacente multiplicado por el precio futuro. Este porcentaje depende del plazo del TES subyacente, y es de 6.5 % para TES de largo plazo.

Por ejemplo, Se considera un agente con una posición en futuros de TES del 2030: el 6 de febrero de 2017, el agente compra 10 contratos sobre este subyacente con expiración marzo 2017 y un precio futuro 107.5. El margen exigido al agente es igual a

$$10 \times 6.5\,\% \times \$250,000,000 \times 107.5 = \$174,687,500.$$

Estas garantías pueden ser dadas en efectivo, o en títulos aceptados (TES o acciones). Los títulos se toman con un *haircut* (entre 2 % y 3.3 % para TES y 50 % para acciones).

El 7 de febrero este contrato cierra a 107.85, generando una ganancia en la cuenta del agente de \$8.75 millones, liberando este monto de las garantías que constituyó inicialmente.

La negociación de instrumentos, tanto en el mercado OTC como en bolsas, puede hacerse por medios electrónicos, en plataformas especializadas, o mediante otros canales (transacción por teléfono o por sistemas de información tales como Bloomberg). Las variables cotizadas pueden ser precios, tasas, u otras variables, y típicamente los mercados aceptan posturas de compra y de venta (puntas de negociación). En los mercados más líquidos, la diferencia entre el precio de compra y el de venta en situaciones normales, se conoce como el *bid-offer spread*. La profundidad del mercado se ve representada en varios niveles de precios de compra y de venta, y en algunas ocasiones es posible “barrer” las pantallas para poder transar montos más altos.

4. Valoración: Principio de No Arbitraje

El objetivo de esta sección es establecer paradigmas para la valoración de los derivados plain vanilla. En particular, dadas ciertas suposiciones de mercado, se pretende encontrar los precios de compra de contratos forward y futuros que hacen que los contratos tengan valor inicial cero, y las primas de las opciones call y put. Como se hará evidente, esta labor es posible aún sin la especificación de modelos para el caso de forwards, pero para las primas de las opciones lo mejor a lo que se puede aspirar es a determinar cotas.

4.1. Bonos Cero Cupón

La teoría de valoración de derivados típicamente supone la existencia de un mercado monetario, o un mercado de bonos cero cupón. En el presente desarrollo se trabajará con bonos cero cupón, que efectivamente representan factores de descuento: un bono cero cupón con madurez T es un instrumento financiero que paga (con certeza) \$1 en el tiempo T. Para $t \leq T$, se denota por $P(t,T)$ el precio en el tiempo t de un bono cero cupón que madura en T. La valoración en el tiempo t de un flujo certero $\$D$ pagadero en el tiempo T sigue la fórmula $\$D \times P(t,T)$. Este es el valor presente de ese flujo. De forma análoga, se puede decir que el valor futuro a un tiempo T de una cantidad de dinero igual a $\$D$ que se tiene en t es $\frac{\$D}{P(t,T)}$. Esta cantidad es la que en vencimiento pagaría una inversión de $\$D$ en el bono cero cupón con expiración T.

Observación 1. $P(t,t) = 1\ \forall t$.

Cuando sea útil hablar de tasas de interés, se escoge, por conveniencia notacional, el esquema de tasas anualizadas compuestas continuamente. Es decir, si se denota por $r(t,T)$ la tasa spot observada en t con expiración T, se tiene

$$P(t,T) = e^{-r(t,T)\times(T-t)}. \tag{1}$$

Observación 2. Si las tasas de interés se suponen no negativas en todo momento, entonces $P(t,\cdot)$ es una función no creciente a todo plazo.

Para discusiones posteriores será útil pensar en financiar compras mediante préstamos, o invertir excesos de liquidez otorgando préstamos. Estas figuras se logran con el uso de bonos cero cupón, interpretando comprar bonos como prestar plata, y vender bonos como pedir prestada plata. En lo que sigue, estos conceptos se suponen equivalentes, y se intercambian frecuentemente.

4.2. Notación y Definiciones

De forma genérica se denotarán las siguientes cantidades:

- $P^{DEN}(t,T)$: precio de un bono cero cupón determinado en el tiempo t con expiración T, denominado en la moneda DEN. Si no se indica la moneda, caso que se da si solo se considera una denominación en el análisis, se omitirá este superíndice.
- $r^{DEN}(t,T)$: tasa spot anualizada compuesta continuamente determinada en el tiempo t con expiración T, para la moneda DEN.
- $F(t,T)$: precio forward determinado en el tiempo t para un contrato con expiración T.
- $\Phi(t,T)$: precio futuro determinado en el tiempo t para un contrato con expiración T.
- $C^E(t,T,K)$: prima de una opción call europea en el tiempo t con strike K y expiración T.
- $C^A(t,T,K)$: prima de una opción call americana en el tiempo t con strike K y expiración T.
- $P^E(t,T,K)$: prima de una opción put europea en el tiempo t con strike K y expiración T.
- $P^A(t,T,K)$: prima de una opción put americana en el tiempo t con strike K y expiración T.

Las variables independientes, además del tiempo t, son las que sobresalen en el contrato derivado. Sin embargo, es importante señalar que no se está implicando que no haya dependencia de otras variables; en efecto, puede haber dependencia a un conjunto grande de variables, notoriamente el precio de mercado del subyacente.

En general, el tiempo se supone medido en años. Un día puede definirse como $1/365.25$ o $1/N$ años, donde N es el número de días laborales. El entorno del problema debe ayudar a escoger el formato más conveniente.

Por otro lado, se mantiene consistencia entre los signos y las operaciones financieras: comprar una cantidad negativa significa vender; prestar una cantidad negativa de plata significa pedir prestada plata; recibir una cantidad negativa de dinero significa que se debe pagar ese dinero. Por último, en ocasiones en la discusión que sigue se hará alusión a compra o venta de forwards o futuros. Estas situaciones se referirán a la posición que se toma en el subyacente. Así, cuando se indique que se compra un forward, en realidad se quiere decir que se entra en un contrato forward desde la posición larga.

4.3. Suposiciones del Mercado

Para efectos de valoración de derivados, se supondrá (a menos que se diga lo contrario) que el mercado de activos básicos cumple las siguientes características:

1. *Existencia de precios.* Se supone que para cada activo básico considerado, y para cada momento del tiempo, existe un único precio correspondiente al activo, $S(t)$. Esto no es siempre obvio para los activos ilíquidos en el mundo “real”. Adicionalmente, esta unicidad supone que el

precio es un precio de compra y de venta simultáneamente, lo cual no se observa ni en los mercados más líquidos.

2. $S(t) \geq 0$. Se establece que los precios de los activos básicos no pueden ser negativos, lo cual no es difícil imaginar satisfaciéndose en la práctica para los activos genéricos considerados.
3. *No hay fricciones.* La existencia de fricciones ocurre como consecuencia de la complejidad misma del mercado. En la aproximación teórica se supondrá:
   - Cero costos de transacción (comisiones y diferencias entre precios de compra y de venta).
   - Infinita divisibilidad de los instrumentos transados. En la práctica es imposible comprar fracciones de acciones en cantidades menores a unidades mínimas de compra; para efectos de esta discusión, se supondrá que sí se puede.
   - Infinita liquidez. Se supone que puede comprarse o venderse una cantidad ilimitada de un mismo activo a su precio. Esto puede estar muy alejado de la realidad, y como tal es una suposición fuerte con la cual se procederá a desarrollar la teoría de valoración. No sobra enfatizar la necesidad de revisar situaciones en las que se anticipe que esta suposición se incumpla fuertemente, como alerta al procedimiento rutinario de valoración de derivados.
4. *Permisibilidad de vender en corto*. En ocasiones en la práctica es posible vender activos que uno no posee, para beneficiarse de caídas en el precio. Es el equivalente a tener un nocional negativo del activo. La forma en que esto típicamente opera es con una operación de recompra, o *repurchase agreement - repo*: comprando el activo por un precio dado (en ocasiones por debajo del precio de mercado mediante la aplicación de un *haircut*), y prometiendo venderlo de vuelta por un precio mayor en un tiempo futuro dado (el precio de venta es igual al precio inicial de compra más los intereses correspondientes, calculados con una tasa repo que corresponde al activo subyacente y al plazo); si el activo tiene flujos intermedios (cupones o dividendos), la parte que inicialmente compra típicamente debe pagarlos a su dueño original. En efecto lo que se hace - simplificando - es pedir prestado el activo, venderlo en el mercado, y recomprarlo en un tiempo futuro para entregarlo de vuelta al dueño original, logrando un beneficio si el precio ha caído, o una pérdida si el precio del activo ha subido.[9] La posibilidad de vender en corto depende de la liquidez del subyacente, de las condiciones de mercado, y de la regulación.[10]
5. *Prohibición de portafolios inadmisibles.* Este punto evita la posibilidad de doblar una apuesta

[9] En Colombia se ha desarrollado un mercado amplio en recompras de TES a corto plazo (uno, dos o tres días - la necesidad de lidiar con riesgo de contraparte vuelve ilíquido el mercado para plazos mayores), mediante la figura de *simultáneas*; el término *repo* se usa exclusivamente para operaciones con el Banco de la República. Para el caso de acciones existen repos y TTVs (transferencia temporal de valores); los repos no permiten al receptor de acciones venderlas libremente, por lo que posiciones cortas deben tomarse mediante TTVs, que en el mercado actual acarrea costos altos: se reversa la dirección normal en repos, y es la parte que entrega el dinero y recibe las acciones la que debe pagar intereses para efectuar la transacción.

[10] Es muy común culpar a participantes que toman posiciones cortas en ciertos activos de la caída en los precios de los mismos. La veracidad de esta conclusión no ha sido establecida de forma clara, pero eso no ha detenido a gobiernos y entes reguladores de montar “cacerías de brujas” para buscar estos culpables, y de paso prohibir las ventas en corto.

indefinidamente: si una persona apuesta \$1 al resultado de un lanzamiento de moneda (digamos que gana \$1 si cae cara), podría en principio adoptar la estrategia de parar si gana, y doblar el monto apostado en una nueva apuesta, si pierde. Haciendo esto indefinidamente, el jugador puede generar una ganancia de \$1 con certeza (eventualmente), aunque en el proceso puede soportar pérdidas ilimitadas. Este tipo de estrategias es prohibido en la discusión presente.

6. *No existen oportunidades de arbitraje*. Un arbitraje es un **portafolio** (es decir, una colección de instrumentos financieros) cuyo valor en el tiempo t, $V(t)$, cumple:
   - $V(0) = 0$
   - $\forall\ t \geq 0 \quad V(t) \geq 0$
   - $\exists\ t > 0 \quad \mathbb{P}[V(t) > 0] > 0$

   La última condición hace referencia a un espacio de probabilidad bien definido, y las tres condiciones caracterizan un portafolio que comienza con valor nulo, nunca puede perder plata, pero tiene probabilidad positiva de ganar plata. Es decir, caracteriza el proverbial "almuerzo gratis". En ocasiones se exhibirán oportunidades de arbitraje de forma más sutil: se entenderá que portafolios que no generan flujos de caja negativos deben tener un valor no negativo, luego si es posible adquirir tal portafolio por un valor negativo (es decir, que el agente recibe plata por recibir el portafolio) entonces se observa una oportunidad de arbitraje.

Adicional a estas condiciones, se supone que existen bonos cero cupón para toda madurez futura.

4.4. Principios de Valoración de Derivados

4.4.1. Forwards

A lo largo de esta discusión se consideran contratos forwards estándar: el precio requerido para entrar en estos contratos es 0; es decir, los forwards se construyen de tal forma que ninguna de las dos partes necesita hacer un pago inicial para poder ingresar en el contrato.

Proposición 1. *Precio Forward de Subyacente sin Flujos.* Consideremos un activo básico sin flujos de caja (puede pensarse en una acción sin dividendos), con precio $S(t)$ en el tiempo t. El precio forward en el tiempo $t = 0$ de un contrato que expira en el tiempo $T > 0$ satisface

$$F(0,T) = \frac{S(0)}{P(0,T)}. \tag{2}$$

Demostración. Procedemos por contradicción: se supone inicialmente que $F(0,T) < \frac{S(0)}{P(0,T)}$. En $t = 0$ se construye el siguiente portafolio:

1. Entrar en la posición larga de un contrato forward con expiración T (con un precio forward igual a $F(0,T)$). Flujo de caja: \$0.

2. Vender en corto una unidad del subyacente. Flujo de caja: $+\$S(0)$.
3. Comprar $\frac{S(0)}{P(0,T)}$ bonos cero cupón con expiración T. Flujo de caja: $-\$S(0)$.

Entrar en este portafolio en el tiempo 0 cuesta \$0. Dado que el subyacente no genera flujos de caja, entre $t = 0$ y $t = T$ no hay flujos de caja en el portafolio. Al llegar a T, se generan los siguientes eventos:

1. Forward: + una unidad del subyacente, $-\$F(0, T)$.
2. Subyacente: - una unidad del subyacente.
3. Bonos: $+\frac{S(0)}{P(0,T)}$.

Al cancelar la posición larga en el subyacente con la posición corta, queda únicamente una cantidad de dinero igual a $\frac{S(0)}{P(0,T)} - F(0, T)$, que por suposición inicial es positiva. Así, se generó un arbitraje, lo cual no es permitido en nuestro mercado. Por lo tanto, la suposición inicial era incorrecta. La otra dirección arroja resultados similares, cambiando los signos correspondientes. Luego la igualdad (2) queda demostrada. □

La interpretación intuitiva de (2) es inmediata: el precio forward (aquél con el cual se logra generar un contrato forward con valor inicial nulo) es igual al valor futuro del precio spot del subyacente. Asimismo, la fórmula permite corroborar la identidad $F(T, T) = S(T)\ \forall T$. Por otro lado, la construcción de un arbitraje en el caso en que el precio forward no satisface la igualdad teórica, saca a flote un punto de vital importancia: para poder asegurar un arbitraje, es necesario eliminar los riesgos que las variables financieras traen al portafolio. Es decir, al existir una relación estrecha entre el derivado y el subyacente, es necesario tomar posiciones contrarias entre los dos para poder asegurar que el valor del portafolio no dependa del precio del subyacente, abriendo el camino a oportunidades de asegurar una utilidad.

Es necesario resaltar este punto, que es la piedra angular conceptual de la teoría de valoración de derivados: en la búsqueda del arbitraje se construye un portafolio sin riesgo. Para lograrlo, se aprovecha un desalineamiento entre el precio teórico del derivado y el precio del subyacente. En la dirección de la demostración mostrada, el precio forward estaba barato (según la valoración propuesta) con respecto al mercado. En esencia, lo que se construye es un portafolio (usando el subyacente y bonos cero cupón) que replica los flujos de caja futuros del contrato derivado. El arbitraje se da al notar que el portafolio replicante y el derivado no tienen igual precio hoy (esto será más evidente cuando se construyan modelos de valoración, tales como el modelo binomial - ver capítulo 5).

El resultado anterior es general: el subyacente puede ser cualquiera que no genere flujos de caja durante la vida del contrato forward. En particular, debe cumplirse para un bono cero cupón con madurez posterior a la expiración del forward.

Proposición 2. *Precio Forward de un Bono Cero Cupón.* El precio forward en el tiempo $t = 0$, que expira en $t = T_1$ del bono cero cupón con madurez $t = T_2 > T_1$ satisface

$$F(0, T_1, T_2) = \frac{P(0, T_2)}{P(0, T_1)}. \tag{3}$$

La expresión (3) indica un factor de descuento forward. De hecho, la cantidad de esa igualdad es la que debe pagarse en el tiempo T_1 para obtener \$1 en el tiempo T_2. Este préstamo futuro implica una tasa de interés (anualizada, compuesta continuamente) $f(0, T_1, T_2)$ que satisface

$$\frac{P(0, T_2)}{P(0, T_1)} = e^{-f(0,T_1,T_2)\times(T_2-T_1)}.$$

Esta es la *tasa de interés forward*; puede notarse que es una tasa que se conoce en $t = 0$, y es la que se pactaría hoy para un préstamo cuyo desembolso ocurriría en el futuro.

Si el subyacente del contrato forward tiene flujos de caja antes de la expiración del forward, se debe corregir el precio inicial del activo por el valor presente de estos flujos (lo cual se puede hacer, por ejemplo, si los flujos son conocidos al comienzo del forward). Por ejemplo, una acción con precio inicial $\$S(0)$ que page un dividendo \$D en el tiempo $\tau \in (t, T)$ puede tomarse equivalente, para efectos de valoración del forward, a una acción que no paga dividendos y tiene un precio inicial de $\$S(0) - DP(0, \tau)$: esto es suponer que el pago del dividendo se anticipa y se hace en el tiempo 0, lo cual no afecta el análisis de valoración del derivado. Se tiene así el siguiente resultado.

Proposición 3. *Precio Forward de una Acción con Dividendos.* El precio forward en el tiempo $t = 0$, que expira en $t = T$, de una acción que paga un dividendo igual a \$D en el tiempo $t = \tau \in (0, T)$ satisface

$$F(0, T) = \frac{S(0) - DP(0, \tau)}{P(0, T)}. \tag{4}$$

La proposición anterior trae un tema interesante. Qué ocurre con la posición corta cuando se presentan flujos tales como un dividendo o un cupón? En general, puede considerarse que las matemáticas se preservan, cambiando signos. Así, si una posición larga genera un pago positivo por causa de un dividendo, una posición corta genera un pago negativo. Para profundizar en este punto, se sugiere al lector construir un arbitraje si se tiene

$$F(0, T) < \frac{S(0) - DP(0, \tau)}{P(0, T)}.$$

Hasta el momento se han manipulado cantidades monetarias sin hacer alusión a la denominación de origen. Implícitamente se ha supuesto que todo el análisis se lleva a caba en una denominación única, pero no se ha especificado cuál. Si la plataforma de análisis incluye varias monedas, es importante ser cuidadoso con la denominación de cada monto. Este es el caso cuando el subyacente es una tasa de cambio. En particular, el universo de bonos cero cupón se extiende: se supone su existencia para todo plazo en cada moneda de análisis.

Proposición 4. *Precio Forward de Divisas.* Si $Q(t)$ denota la tasa de cambio en el tiempo t entre las monedas D_1 y D_2 (es decir, $Q(0)$ es el número de unidades de la moneda D_1 que equivalen a una unidad de la moneda D_2), entonces el precio forward en el tiempo $t = 0$, que expira en $t = T$, de una unidad de la moneda D_2, satisface

$$F(0,T) = \frac{Q(0)P^{D_2}(0,T)}{P^{D_1}(0,T)}. \tag{5}$$

Demostración. Nuevamente se procede por contradicción, suponiendo que (5) es falsa: se supone inicialmente que $F(0,T) < \frac{Q(0)P^{D_2}(0,T)}{P^{D_1}(0,T)}$. En $t = 0$ se construye el siguiente portafolio:

1. Entrar en la posición larga de un contrato forward con expiración T (con un precio forward igual a $F(0,T)$). Flujo de caja: \$0.
2. Comprar $\frac{Q(0)P^{D_2}(0,T)}{P^{D_1}(0,T)}$ bonos cero cupón en la moneda D_1 con expiración T. Flujo de caja:
$$-D_1\$Q(0)P^{D_2}(0,T).$$
3. Comprar $\$Q(0)P^{D_2}(0,T)$ en la moneda D_1, vendiendo $\$P^{D_2}(0,T)$ en la moneda D_2. Flujos de caja:
$$D_1\$Q(0)P^{D_2}(0,T),\ -D_2\$P^{D_2}(0,T).$$
4. Vender un bono cero cupón en la moneda D_2 con madurez T. Flujo de caja:
$$D_2\$P^{D_2}(0,T).$$

Entrar en este portafolio en el tiempo 0 cuesta \$0. No existen flujos de caja en el portafolio entre $t = 0$ y $t = T$. Al llegar a T, se generan los siguientes eventos:

1. Forward: $+D_2\$1$, $-D_1\$F(0,T)$.
2. Bonos Dominados en D_1: $D_1\$\frac{Q(0)P^{D_2}(0,T)}{P^{D_1}(0,T)}$.
3. Bonos Dominados en D_2: $-D_2\$1$.

Al netear posiciones contrarias, no queda nada en la moneda D_2, y en D_1 queda una cantidad de dinero igual a
$$D_1\$\Big(\frac{Q(0)P^{D_1}(0,T)}{P^{D_2}(0,T)} - F(0,T)\Big),$$
que por suposición incial es positiva. Esto es un arbitraje, lo cual no es permitido en nuestro mercado. Por lo tanto, la suposición inicial era incorrecta. La otra dirección arroja resultados similares, cambiando los signos correspondientes. □

Observación 3. Esta demostración es casi idéntica a la de la Proposición 1. Una diferencia importante es que en la situación de la tasa de cambio se piden prestadas divisas para monetizarlas e invertir los fondos resultantes. En realidad esto también ocurría de forma implícita en la Proposición 1, notando que para poder vender en corto el subyacente se debe pedir prestado, para luego venderlo en el mercado. En adición, es importante tener en cuenta que una divisa como tal puede no ser considerada como un activo. Un billete de un dólar debe ser pensado como una cuenta de ahorros con una inversión de un dólar, ya que el efectivo puede ser asociado con el costo de oportunidad que entregan las tasas de interés.

Observación 4. La expresión (5) puede escribirse usando tasas de interés:

$$F(0,T) = Q(0)e^{(r^{D2}(0,T) - r^{D1}(0,T)) \times T}. \tag{6}$$

La interpretación de esta fórmula es diciente: el precio forward de una divisa debe ser igual al precio spot devaluado con una tasa igual al diferencial de tasas de interés. En caso contrario existiría una oportunidad de arbitraje.

Caso 1. *Mercado de NDFs COP/USD.* La Tabla 1 muestra tasas de cambio forward que están por debajo de la tasa spot, según el mercado observado en marzo 10, 2011. Por ejemplo, se considera el punto de 1 mes. El precio forward es \$1861.5 contra el precio spot de \$1867.5. Según la fórmula (6), debe tenerse

$$r^{COP}(0,T) \simeq -3.5\,\%,$$

tomando las tasas de interés en dólares muy cercanas a 0 % (tal como estaban en marzo de 2011). Claramente las tasas en Colombia no eran negativas en esos momentos: podrían tomarse más cercanas a 3.5 %. La diferencia de 7 % es suficientemente grande para apreciar que no se trata de imprecisiones en estos cálculos. La respuesta es más fundamental: en Colombia se incumple fuertemente la suposición de infinita liquidez. Esta suposición es en general poco realista, pero en el caso de mercados líquidos no afecta sustancialmente el desarrollo de la teoría y su aplicación práctica. En el caso del mercado de divisas de Colombia existe una regulación que aleja sustancialmente la teoría de la práctica.[11] Esta regulación es la de la Posición Propia de Contado (descrita en la Circular Reglamentaria Externa DODM 139 del Banco de la República), donde se restringe la posición neta (activos menos pasivos corrientes) en moneda externa (cantidad que no incluye la posición en derivados) a estar entre 0 % y 50 % del patrimonio técnico de la institución.

La dirección del "arbitraje" en el mercado de forwards es, fortuitamente, igual a la dirección supuesta en el argumento por contradicción de la Proposición 4. La demostración ofrece a posibles arbitradores la receta para acceder al arbitraje. El cuarto paso indicaba vender un bono cero cupón

[11] En realidad la restricción se vuelve importante no para el mercado de divisas, o de derivados, sino para préstamos: para el grueso de participantes del sector financiero no es factible pedir prestado en moneda extranjera en cantidades notables.

en dólares; es decir, pedir prestados dólares. Este es el paso que es difícil o imposible hacer para los participantes del sector financiero si quieren cumplir con la regla de la PPC.

Dos observaciones deben hacerse: primero, el sector real no está regido por esta regulación, y en general sí puede acceder a préstamos en dólares. Así, instituciones grandes, en general, que tengan infraestructura para operar derivados de tasa de cambio, tienen acceso a este arbitraje. La forma de generarlo está dada en la demostración de la Proposición, de donde se surge la observación de que las tasas relevantes en estos argumentos pueden variar con el participante.

Ejemplo 7. Acceso al arbitraje de forwards para una empresa del sector real colombiano. Se considera una empresa colombiana que no tiene mayor exposición cambiaria y está siguiendo el mercado cambiario en marzo del 2011.[12] Supongamos que la empresa tiene buena calidad crediticia, y puede acceder a un préstamo en dólares al 1.5 % por un mes.[13] La empresa pide prestados USD$1 millón el 15 de marzo, y los monetiza a la tasa spot.[14] Es posible que, considerando costos de transacción, la tasa de cambio neta sea algo menor: supongamos que obtiene neto COP$1,865.5 millones. Finalmente, compra USD$1.00129 millones forward (que es lo que debe pagar en el préstamo, suponiendo un conteo de días ACT/360) a un mes, a una tasa de $1862.5 (nuevamente acomodando posibles costos de transacción, aunque estos pueden reducirse transando el *swap*; es decir, comprando el forward y simultáneamente, y con el mismo intermediario de mercado, vendiendo el spot). El 15 de abril, suponiendo que el dólar puede comprarse a una tasa de cambio Q, la empresa paga COP$$1.00129 * Q$ millones para comprar USD$1.00129 millones, con lo cual paga su préstamo. La liquidación del forward le da (o quita, en caso de ser una cantidad negativa) COP$$1.00129 \times (Q - 1862.5)$.

En resumen, la empresa pidió COP$$1,865.5$ millones el 15 de marzo, y tuvo que pagar COP$1864.9 el 15 de abril. Es decir, se financió a una tasa negativa en pesos durante un mes. En la medida en que el mercado se mantenga así, la empresa puede acceder a créditos sintéticos con tasas negativas en pesos. Desde otro punto de vista, excluyendo así la operación y naturaleza de la empresa, puede comprar un TES o un CDT a un mes, que en marzo de 2011 podían pagar tasas cercanas al 3.5 %, cerrando así el arbitraje. Vale la pena comentar que puede existir riesgo de contraparte en el forward pactado, pero es factible pensar que las suposiciones del ejemplo permiten ignorar este punto sin perder generalidad: el arbitraje es real. La pregunta es, por qué los participantes del sector real permiten la existencia de este arbitraje? Por qué dejan plata gratis sobre la mesa? La respuesta radica en el subdesarrollo del mercado en estos sectores, en combinación con la natural reticencia de empresas a dedicar su esfuerzo y capital a actividades alejadas de la misión de la empresa.

Es importante no confundir el precio forward con el precio **del** forward. El primero es el precio

[12] El argumento para exportadores o importadores sigue igual, pero se debe adecuar la presentación para que tenga más sentido.

[13] Por referencia, todo el mes de marzo de 2011 la tasa LIBOR de 1 mes estuvo entre 0.24 % y 0.27 %.

[14] Sin perder generalidad, suponemos que el préstamo se desembolsa el día en que se negocia, y que debe ser pagado el 15 de abril.

de compromiso de compra futura; el segundo es el valor de un instrumento financiero (el contrato forward). Típicamente, las características de un contrato forward se definen para obtener un valor inicial del forward de \$0. Sin embargo, en la medida en que pasa el tiempo, y los mercados cambian, el valor de ese contrato flotará con los mercados, como se puede apreciar en el siguiente resultado.

Proposición 5. *Precio de un Contrato Forward.* Consideremos un contrato forward como el descrito en la Proposición 1. El valor del contrato (para la parte larga) en el tiempo $t = \tau \in [0, T]$ satisface

$$V(\tau) = (F(\tau, T) - F(0, T)) \times P(\tau, T). \tag{7}$$

Demostración. Se toma como punto de partida el contrato forward de compra pactado en el tiempo $t = 0$. En el tiempo $t = \tau$ se agrega al portafolio un contrato forward de venta con las mismas características del forward inicial, excepto por el strike, que es igual a $F(\tau, T)$. Por construcción, este nuevo contrato tiene valor 0. Así el valor del portafolio en τ es igual a $V(\tau)$, que es el valor del forward inicial.

Ahora, los flujos de caja del portafolio son sencillos, y consisten únicamente de un pago determinístico de $F(\tau, T) - F(0, T)$ en el tiempo T. El valor presente de este pago es igual a la expresión dada en (7). $\square$

4.4.2. Futuros

La diferencia entre los futuros y los forwards radica en la cuenta de margen (es decir, en la marcación a mercado diaria de los futuros); más precisamente, en un contrato forward se espera hasta su vencimiento para liquidar la posición, luego solo existe un flujo de caja neto al final del contrato.[15] En el caso de los futuros, la presente discusión supone un flujo de caja diario, con el cual se administra el PyG de la cuenta. En días en que existen ganancias, se acredita la cuenta con un flujo positivo para el agente, y en días de pérdida se debe reponer el faltante en la cuenta, generando un flujo de caja negativo para el agente. Esta diferencia solo se vuelve importante en la medida en que el PyG generado en la cuenta está correlacionado con los movimientos de tasas de interés. La siguiente proposición considera un caso particular de esta situación, reconociendo que resultados más generales se salen del alcance del presente texto.

Proposición 6. *Futuros vs Forwards.* Si las tasas de interés son determinísticas, el precio forward $(F(0, T))$ y el precio futuro $(\Phi(0, T))$ deben ser iguales.

Demostración. En el tiempo $t = 0$ se consideran contratos futuros y forwards sobre el mismo subyacente y con las mismas características (términos de entrega, etc.). La expiración de los

[15] En la práctica, pueden exisitir provisiones de colateral y otros detalles que desvíen esta afirmación de la realidad, pero esas características se ignoran en la presente discusión.

contratos es $t = T$. Se simplifica el mercado suponiendo que un contrato futuro solo es marcado a mercado una vez, en $t = \tau \in (0, T)$. El argumento usado a continuación puede ser extendido a casos más generales. Se procede por contradicción: se supone que $F(0, T) > \Phi(0, T)$; la otra dirección se maneja de manera análoga. En $t = 0$ se construye el siguiente portafolio:

1. Entrar en la posición corta de un contrato forward con expiración T (con un precio forward igual a $F(0, T)$). Flujo de caja: \$0.
2. Entrar en la posición larga de $P(\tau, T)$ contratos futuros con expiración T (con un precio futuro igual a $\Phi(0, T)$). Flujo de caja: \$0.

En esta última operación es donde se usa el conocimiento anticipado de las tasas en el futuro, considerando el monto de futuros a comprar. Entrar en este portafolio en el tiempo 0 cuesta \$0. Al llegar a τ, se marca a mercado la posición en futuros: se acredita la cuenta de margen con una cantidad de dinero igual a $(\Phi(\tau, T) - \Phi(0, T)) \times P(t, T)$. En ese momento se invierte este dinero en bonos, y se compran los futuros que hacen falta para completar la unidad (que es la exposición en la posición de forwards).

1. Comprar $(\Phi(\tau, T) - \Phi(0, T))$ bonos cero cupón con expiración T. Flujo de caja: $-(\Phi(\tau, T) - \Phi(0, T)) \times P(t, T)$.
2. Entrar en la posición larga de $1 - P(\tau, T)$ contratos futuros con expiración T (con un precio futuro igual a $\Phi(\tau, T)$). Flujo de caja: \$0.

El flujo de caja neto en τ es 0 por construcción. Entre τ y T no se generan flujos de caja adicionales, considerando las suposiciones simplificadas del problema. Así, se considera el momento de expiración, $t = T$.

1. Forward: - una unidad del subyacente, $+\$F(0, T)$.
2. Futuro: + una unidad del subyacente, $-\$\Phi(\tau, T)$.
3. Bonos: $\Phi(\tau, T) - \Phi(0, T)$.

Al cancelar las posiciones en el subyacente, queda únicamente una cantidad de dinero igual a $\$(F(0, T) - \Phi(0, T))$, que por suposición incial es positiva. Esto es un arbitraje, lo cual no es permitido en el mercado. Por lo tanto, la suposición inicial era incorrecta. $\square$

La clave de la demostración está en anticipar parcialmente el llamado de margen en τ, usando el conocimiento de las tasas de interés futuras. Si en $t = 0$ se hubiera igualado el nocional de futuros con el de forwards, ese llamado de margen habría generado exposición al precio futuro en τ, el cual es desconocido en $t = 0$. Como se mencionó anteriormente, el resultado se puede extender a situaciones de tasas de interés estocásticas, pero no correlacionadas con el subyacente. Sin embargo, cuando existe una correlación no nula entre las tasas de interés y el precio del subyacente, los precios futuros difieren de los forward.

Para entender mejor esta situación, se puede considerar un subyacente cuyo precio esté positivamente correlacionado con las tasas de interés de corto plazo.[16] Una posición larga en futuros del subyacente implica flujos de caja positivos cuando las tasas de interés tienden a subir (permitiendo inversiones a tasas más altas) y flujos negativos cuando las tasas tienden a bajar (permitiendo financiar las pérdidas a tasas más bajas).[17] Esto debe corregir el precio futuro con respecto al forward, ya que en el segundo no se tiene este beneficio. Luego en este caso, el precio futuro debe ser mayor al precio forward. La situación contraria en la correlación produce una relación inversa entre los precios. Por ejemplo, en contratos sobre tasas de interés, las tasas de contratos futuros deben ser mayores que las tasas de contratos forward equivalentes.

Las tasas mencionadas son las de muy corto plazo, y en la práctica puede ser difícil ver relaciones estadísticas entre cualquier subyacente (incluyendo bonos) y estas tasas. Sin embargo, diferencias entre futuros y forwards se observan en la práctica, mediante la *corrección por convexidad*. Esta corrección reconoce la diferencia mencionada, aunque en general un valor teórico depende de la construcción de modelos de difusión del subyacente. En general, a nivel simplificado, esta corrección depende de la varianza del retorno del subyacente (según el modelo) al plazo de expiración, corregido por la correlación con la tasa de interés de corto plazo. Por ejemplo, para futuros de tasas de interés (que tienen una correlación positiva alta con la tasa de interés de corto plazo), una regla simplificada para la magnitud de corrección mencionada es la cantidad

$$\frac{1}{2}\sigma^2 T,$$

donde σ es la volatilidad (desviación estándar) anualizada de la tasa de interés subyacente, y T es la expiración del contrato.

4.4.3. Opciones

Como se mencionó anteriormente, es imposible llegar a precios de opciones por métodos de no arbitraje, tal como se logró para el mercado de forwards, sin el desarrollo de modelos. Sin embargo, es posible caracterizar de forma cualitativa ciertas características que deben satisfacer estas primas. Sin duda la más importante es la Paridad Put-Call:

Proposición 7. *Paridad Put-Call.* Se consideran fijos una fecha de expiración T y un Strike K. Se denomina $S(t)$ el precio de un activo dado en el tiempo t; este activo no presenta flujos de caja entre t y T. Tomando las suposiciones dadas en la sección 4.3, se tiene

[16]Por ejemplo, en general precios altos de commodities pueden implicar sesgos al alza en las perspectivas de la tasa de inflación, lo cual puede traer expectativas de subidas de tasas de intereses en la economía. Sin embargo, las relaciones pueden ser de muy largo plazo, y muy débiles para ser consideradas generales.

[17]La posición en gamma es positiva, generando beneficios cuando el mercado se mueve, como se verá en el capítulo 8.

- *Paridad Put-Call para Opciones Europeas.* Para $t \leq T$, se tiene

$$C^E(t,T,K) - P^E(t,T,K) = S(t) - KP(t,T). \tag{8}$$

- *Paridad Put-Call para Opciones Americanas.* Para $t \leq T$, se tiene

$$S(t) - K \leq C^A(t,T,K) - P^A(t,T,K) \leq S(t) - KP(t,T). \tag{9}$$

Demostración. Para evitar confusión, se trabaja en el tiempo $t = 0$.

(i) Para la igualdad del caso europeo se procede por contradicción, suponiendo $C^E(0,T,K) - P^E(0,T,K) \leq S(0) - KP(0,T)$. La otra dirección se demuestra de forma análoga. En el tiempo $t = 0$ se construye el siguiente portafolio:

1. Comprar una opción call europea con expiración y Strike dados. Flujo de caja: -\$$C^E(0,T,K)$.
2. Vender una opción put europea con expiración y Strike dados. Flujo de caja: +\$$P^E(0,T,K)$.
3. Vender en corto una unidad del subyacente. Flujo de caja: +\$$S(0)$.
4. Comprar $\frac{P^E(0,T,K)+S(0)-C^E(0,T,K)}{P(0,T)}$ bonos cero cupón con expiración T. Flujo de caja: \$$\big[-P^E(0,T,K) - S(0) + C^E(0,T,K)\big]$.

Entrar en este portafolio en el tiempo 0 cuesta \$0. Los siguientes flujos de caja del portafolio se generan en el tiempo $t = T$.

1. $$\text{Largo Opción Call}: \begin{cases} + \text{ una unidad del subyacente, -\$K}, & \text{si } S(T) \geq K; \\ \text{no hay flujos}, & \text{si } S(T) < K; \end{cases}$$

2. $$\text{Corto Opción Put}: \begin{cases} \text{no hay flujos}, & \text{si } S(T) \geq K; \\ + \text{ una unidad del subyacente, -\$K}, & \text{si } S(T) < K; \end{cases}$$

3. Bonos: +\$$\frac{P^E(0,T,K)+S(0)-C^E(0,T,K)}{P(0,T)}$.

Independiente del precio del subyacente en el momento de expiración de las opciones, se compra una unidad pagando un precio K. Esta compra se netea con la posición corta en el subyacente, dejando tan solo una cantidad de dinero igual a $\frac{P^E(0,T,K)+S(0)-C^E(0,T,K)}{P(0,T)} - K$, que por suposición inicial es positiva. Esto es un arbitraje, lo cual no es permitido en el mercado. Por lo tanto, la suposición inicial era incorrecta.

(ii) Las desigualdades del caso americano se dejan como ejercicio al lector. $\square$

La demostración del caso europeo permiten entender la situación planteada. Comprar una opción call y vender una opción put (con iguales expiraciones y Strikes) tienen el efecto de comprar *con certeza* una unidad del subyacente a un precio igual al Strike en el momento de expiración. Es decir, esa mezcla es idéntica a un contrato forward, donde el precio de compra es igual al Strike de las opciones. Gráficamente, al restar la Figura 8 de la Figura 7 se genera una línea que cruza el eje x en el Strike; es decir, es equivalente a pagar un precio $\$K$ por una unidad del subyacente con certeza. En particular, si el Strike es igual al precio forward, entonces las primas de las opciones call y put europeas deben coincidir, según se corrobora con (2).

Proposición 8. *Cotas.* Se consideran fijos una fecha de expiración T y un Strike K. Se considera un activo con precio $S(t)$ en el tiempo t que no presenta flujos de caja entre t y T. Tomando las suposiciones dadas en la sección 4.3, se tiene

1. $C^E(t,T,K) \leq C^A(t,T,K)$.
2. $P^E(t,T,K) \leq P^A(t,T,K)$.
3. $S(t) - KP(t,T) \leq C^E(t,T,K) \leq S(t)$.
4. $\max(0, KP(t,T) - S(t)) \leq P^E(t,T,K) \leq KP(t,T)$.
5. $K - S(t) \leq P^A(t,T,K) \leq K$.

Demostración. Las demostraciones se dejan como ejercicio para el lector. $\square$

En principio, la prima de una opción americana podría ser estrictamente mayor que la prima de su equivalente europea: claramente el exceso de opcionalidad que ofrece la americana puede traducirse en un exceso de valor para su tenedor. Sin embargo, este no es el caso para opciones call, como se exhibe en el siguiente resultado.

Proposición 9. *Igualdad entre Opciones Call Americanas y Europeas para Subyacentes sin Dividendos.* Se supone que las tasas de interés del mercado son no negativas, y se consideran fijos una fecha de expiración T y un Strike K, y un activo con precio $S(t)$ en el tiempo t que no presenta flujos de caja entre t y T. Tomando las suposiciones dadas en la sección 4.3, se tiene

$$C^E(t,T,K) = C^A(t,T,K).$$

Demostración. Se procede por contradicción, suponiendo $C^E(t,T,K) < C^A(t,T,K)$. La otra dirección es clara (Proposición 8). Sin perder generalidad, se toma como tiempo inicial $t = 0$, momento en el que se construye el siguiente portafolio:

1. Comprar una opción call europea con expiración y Strike dados. Flujo de caja: -$\$C^E(0,T,K)$.
2. Vender una opción call americana con expiración y Strike dados. Flujo de caja: $+\$C^A(0,T,K)$.
3. Comprar $\frac{C^A(0,T,K)-C^E(0,T,K)}{P(0,T)}$ bonos cero cupón con expiración T. Flujo de caja: -$\$(C^A(0,T,K) - C^E(0,T,K))$.

Entrar en este portafolio en el tiempo 0 cuesta \$0. En el caso en que la opción americana no es ejercida antes de su expiración, los flujos generados por las opciones en $t = T$ se netean, dejando un flujo de caja positivo causado por los bonos. Luego el caso interesante es aquél en el que la opción americana es ejercida en un tiempo $t = \tau < T$ (que es precisamente el valor extra que puede ofrecer la americana sobre la europea). En este caso, en el tiempo τ se generan los siguientes movimientos en el portafolio:

1. Vender (en corto) una unidad del subyacente, producto del ejercicio de la opción americana. Flujo de caja: $+\$K$.
2. Comprar $\frac{K}{P(\tau,T)}$ bonos cero cupón con expiración T. Flujo de caja: $-\$K$.

No se producen eventos hasta $t = T$, momento en el cual se decide si se ejerce la opción europea. Si $S(T) < K$, la opción no se ejerce, dejando en el portafolio una cantidad de dinero igual a $\frac{C^A(0,T,K)-C^E(0,T,K)}{P(0,T)} + \frac{K}{P(\tau,T)}$. Dado que $S(T) < K$ y $P(\tau,T) \leq 1$ (las tasas de interés son no negativas), el dinero alcanza para comprar la unidad del subyacente para cubrir el corto, y queda una cantidad positiva, por suposición inicial.

En el otro caso, cuando $S(T) \geq K$, se ejerce la opción, comprando una unidad del subyacente (que netea la posición corta que se traía desde τ) por un precio $\$K$. El dinero que queda en el portafolio es $\frac{C^A(0,T,K)-C^E(0,T,K)}{P(0,T)} + \frac{K}{P(\tau,T)} - K$. Esta cantidad es estrictamente positiva, dada la suposición inicial, y el hecho de que las tasas de interés son no negativas, con lo cual se concluye el resultado deseado.- $\square$

Aunque a primera vista este resultado es algo sorprendente, en la medida en que determina que el exceso de opcionalidad dado por una opción americana no tiene valor en el caso de subyacentes sin dividendos, con algo de análisis se puede intuir la razón: las tasas de interés son no negativas. Es decir, el valor del tiempo es positivo. Luego ejercer anticipidamente una opción americana genera un costo de oportunidad para su tenedor, considerando que debe fondear el dinero para comprar el subyacente. En otras palabras, un ejercicio anticipado solo se debe hacer cuando el subyacente está claramente por encima del Strike, y no cabe duda de que (así sea anticipadamente, o en su expiración) la opción será ejercida; si hay posibilidades reales de que el precio del subyacente termine por debajo del Strike, no habría razón para no esperar. Luego en los casos en los que se consideraría ejercer anticipadamente, igual se tendría certeza de que la opción europea será ejercida en su expiración. Es decir, ya se es dueño del subyacente (así sea anticipadamente o en la expiración). La diferencia está en la espera: si se compra anticipadamente, se debe girar el pago anticipadamente. Si se compra en expiración, se debe hacer el (mismo) pago más tarde. Es ese costo de oportunidad el que produce el resultado. En efecto, ese sesgo del signo de las tasas de interés diferencian el comportamiento de opciones Call y Put; en el caso de las opciones put americanas sí puede ser beneficioso un ejercicio temprano: su tenedor vendería el subyacente y recibiría dinero anticipadamente, que puede poner a rendir a tasas de interés no negativas. Es decir, en este caso el costo de oportunidad se genera al no ejercer la opción (siempre que haya certeza de su eventual ejercicio), ya que se estaría recibiendo dinero anticipadamente.

Caracterización Cualitativa de la Prima de Opciones Contractualmente sobresalen dos variables genéricas que afectan el precio de opciones: el Strike y la expiración. Inicialmente es posible agregar otra variable que debe ser considerada: el precio del subyacente. El objetivo en capítulos siguientes es determinar cuantitativamente la prima de “no arbitraje” en términos de estas variables (y otras que puedan definir paramétricamente los modelos de difusión del precio del subyacente). En la presente sección se pretende abordar el problema desde un punto de vista más cualitativo, centrando la atención en el caso de opciones europeas sobre un subyacente sin dividendos. Sin pérdida de generalidad, se considera la valoración en el tiempo inicial $t = 0$. Asimismo, cuando sea necesario, se agregará la dependencia explícita de las primas de las opciones al precio del subyacente.

Dependencia del Strike El primer resultado indica que las primas de las opciones son monótonas decrecientes en el strike para el caso call, y crecientes para el caso put. En adición, se establece que la magnitud de esta monotonicidad está acotada por el factor de descuento hasta la expiración.[18]

Proposición 10. Se toman dos niveles de Strike, K_1 y K_2, con $0 < K_1 < K_2$. Se tiene

$$0 \leq C^E(0,T,K_1) - C^E(t,T,K_2) \leq P(0,T) \times (K_2 - K_1) \tag{10}$$
$$0 \leq P^E(0,T,K_2) - P^E(t,T,K_1) \leq P(0,T) \times (K_2 - K_1). \tag{11}$$

Demostración. Las desigualdades de la izquierda se siguen inmediatamente de la definición de las opciones: se debe pagar más por el derecho a comprar un subyacente a menor precio, para el caso de la call, o por venderlo a mayor precio, para el caso de la put. Para las desigualdades de la derecha, la paridad put-call, para cada Strike, permite escribir

$$C^E(0,T,K_1) - P^E(0,T,K_1) = S(0) - K_1 \times P(0,T)$$
$$C^E(0,T,K_2) - P^E(0,T,K_2) = S(0) - K_2 \times P(0,T).$$

Restando la segunda de la primera se obtiene

$$\Big(C^E(0,T,K_1) - C^E(0,T,K_2)\Big) + \Big(P^E(0,T,K_2) - P^E(0,T,K_1)\Big) = P(0,T) \times (K_2 - K_1).$$

Los resultados siguen al considerar las desigualdades iniciales. □

El siguiente resultado es más técnico. Antes de enunciarlo, se recuerda que una función real f se denomina convexa en el intervalo $[a, b]$ si todo segmento de recta uniendo dos puntos de la

[18]Es decir, las primas son Lipschitz de orden 1 con constante igual al factor de descuento hasta la expiración.

función (en este intervalo) se encuentra en su totalidad por encima de la gráfica de la función. Matemáticamente, esto se cumple si para todo $c, d \in [a, b]$ y $\alpha \in (0, 1)$ se tiene

$$f(\alpha c + (1-\alpha)d) \leq \alpha f(c) + (1-\alpha)f(d).$$

Proposición 11. $C^E(0,T,K)$ y $P^E(0,T,K)$ son funciones convexas en K en todo el semieje positivo.

Demostración. Se considera el caso de opciones call, siendo el caso put análogo. Se procede por contradicción, suponiendo la existencia de $K_1, K_2 > 0$, con $K_1 < K_2$, y $\alpha \in [0, 1]$ tales que

$$C^E(0, T, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) > \alpha C^E(0, T, K_1) + (1-\alpha)C^E(0, T, K_2).$$

En el tiempo inicial, $t = 0$, se construye el siguiente portafolio:

1. Vender una opción call europea con expiración T y Strike $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$. Flujo de caja: $+\$C^E(0, T, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2)$.
2. Comprar α opciones call europeas con expiración T y Strike K_1. Flujo de caja: $-\$\alpha C^E(0, T, K_1)$.
3. Comprar $1-\alpha$ opciones call europeas con expiración T y Strike K_2. Flujo de caja: $-\$(1-\alpha)C^E(0, T, K_2)$.
4. Comprar $\frac{C^E(0,T,\alpha K_1+(1-\alpha)K_2)-\alpha C^E(0,T,K_1)-(1-\alpha)C^E(0,T,K_2)}{P(0,T)}$ bonos cero cupón con expiración T. Flujo de caja: $-\$\big[C^E(0, T, \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2) - \alpha C^E(0, T, K_1) - (1-\alpha)C^E(0, T, K_2)\big]$.

Se necesita \$0 para crear este portafolio. En la expiración hay cuatro casos que considerar:

1. $S(T) < K_1$. En este caso las tres opciones vencen sin ser ejercidas, y lo que queda es el dinero proveniente de la posición en bonos, que es positivo.
2. $K_1 \leq S(T) < \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$. En este caso solo se ejerce la opción con Strike K_1, sobre la cual se tiene una posición larga. Con el dinero proveniente de los bonos se termina con una cantidad de dinero positiva.
3. $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 \leq S(T) < K_2$. El ejercicio de las opciones dejan una cantidad de dinero igual a $\$\alpha(S(T) - K_1) - (S(T) - \alpha K_1 - (1-\alpha)K_2) = \$(1-\alpha)(K_2 - S(T)) > \$0$. Al considerar lo que resta, que es una posición larga en bonos, se termina con una cantidad positiva de dinero.
4. $K_2 \leq S(T)$. Todas las opciones se ejercen, dejando una cantidad de dinero igual a $\$\alpha(S(T) - K_1) - (S(T) - \alpha K_1 - (1-\alpha)K_2) + (1-\alpha)(S(T) - K_2) = \$0$. Al considerar lo que resta, que es una posición larga en bonos, se termina con una cantidad positiva de dinero.

En cualquier caso se viola la no existencia de arbitraje en el mercado, permitiendo concluir. $\square$

Dependencia del Precio del Subyacente Conceptualmente, resulta menos natural pensar en variar el precio del subyacente, ya que ésta es una cantidad dada por el mercado (a diferencia del Strike, que es dada por el contrato pactado). Sin embargo, puede pensarse en cambiar el subyacente, tomando un portafolio con β unidades del subyacente original. En efecto, el precio del nuevo activo es β veces el precio del activo original, permitiendo proceder. Adicionalmente, puede apreciarse una dualidad entre el Strike y el precio del subyacente. La prima de las opciones deberían depender de la comparación entre estos dos valores. Luego los resultados mencionados en la sección anterior se deben preservar en el caso del precio del subyacente.

Proposición 12. Se toman dos niveles del precio del subyacente, x_1 y x_2, con $0 < x_1 < x_2$. Se tiene

$$0 \leq C^E(0,T,K,x_2) - C^E(t,T,K,x_1) \leq x_2 - x_1 \tag{12}$$

$$0 \leq P^E(0,T,K,x_1) - P^E(t,T,K,x_2) \leq x_2 - x_1 \tag{13}$$

Demostración. La demostración es casi idéntica a la de la Proposición 10. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector. □

El resultado anterior es interesante: el precio de una opción call debe crecer cuando el precio del subyacente crece, pero este crecimiento (del precio de la opción) es acotado por el crecimiento del precio del subyacente. Es decir, el precio de la opción es creciente en el precio del subyacente, pero no mucho. Este resultado, combinado con el siguiente, permitirán caracterizar con cierto detalle la forma geométrica del precio de las opciones.

Proposición 13. $C^E(0,T,K,x)$ y $P^E(0,T,K,x)$ son funciones convexas en x en todo el semieje positivo.

Demostración. Por medio de argumentos de no arbitraje se puede verificar que para todo $\beta > 0$,

$$C^E(0,T,K,\beta S(0)) = \beta C^E(0,T,\frac{K}{\beta},S(0)),$$

donde la prima de la izquierda se puede interpretar como el precio de una opción call sobre un portafolio con β unidades del subyacente. Con esto, se toman $\alpha \in [0,1]$ y $S_1 = \beta_1 S(0)$, $S_2 = \beta_2 S(0)$ para números $\beta_1, \beta_2 > 0$, y se aprovecha la Proposición 11 para obtener

$$\begin{aligned} C^E(0,T,K,(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2)S(0)) &= (\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2)C^E(0,T,\frac{K}{\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2},S(0)) \\ &\leq \alpha\beta_1 C^E(0,T,\frac{K}{\beta 1},S(0)) + (1-\alpha)\beta_2 C^E(0,T,\frac{K}{\beta 2},S(0)) \\ &= \alpha C^E(0,T,K,\beta_1 S(0)) + (1-\alpha)C^E(0,T,K,\beta_2 S(0)). \end{aligned}$$

La demostración es análoga para el caso de opciones put y se deja como ejercicio para el lector. □

Con este par de resultados, en adición a las siguientes observaciones, que siguen de consideraciones financieras:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} C^E(0,T,K,x) &= 0 \\
\lim_{x\to \infty} C^E(0,T,K,x) &= S(0) - KP(0,T) \\
\lim_{x\to 0} P^E(0,T,K,x) &= KP(0,T) \\
\lim_{x\to \infty} P^E(0,T,K,x) &= 0,
\end{aligned}$$

se puede obtener una buena aproximación cualitativa de la gráfica del precio de la opción call como función del subyacente: es una función que comienza en 0, es creciente y convexa, y converge asintóticamente a la recta $y = x - KP(0,T)$; y de la opción put: comienza en $KP(0,T)$, es decreciente y convexa, y converge asintóticamente al eje x. Las figuras 9 y 10 muestran la geometría genérica para las primas de opciones call y put europeas.

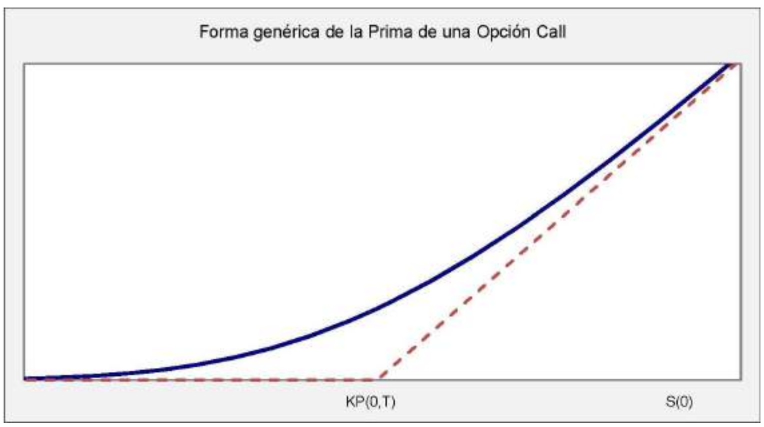

Figura 9: Gráfica genérica de la prima de una opción call.

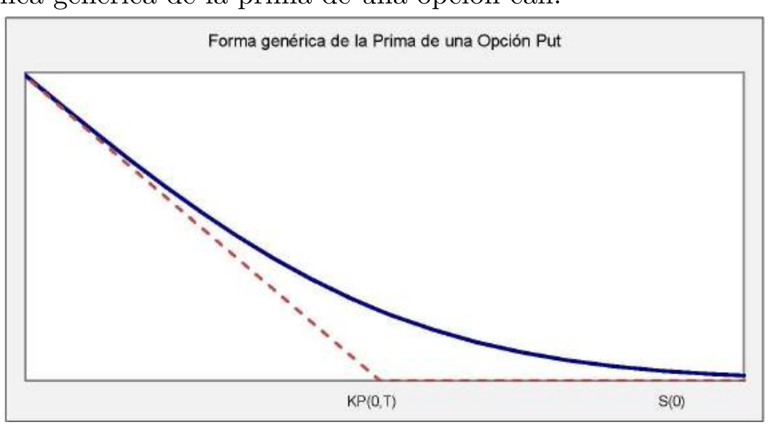

Figura 10: Gráfica genérica de la prima de una opción put.

La relación entre el *valor presente* del Strike y el precio del subyacente es de considerable importancia para el analista estudiando la valoración de una opción. En efecto, la posición relativa entre los dos valores define el *moneyness* de la opción.

Definición 1.
- *Opción In-the-Money*: el precio del subyacente sugiere que la opción será ejercida. En el caso de opciones call, esto se traduce en $S(0) > KP(0,T)$. Para opciones put, es $S(0) < KP(0,T)$.
- *Opción Out-of-the-Money*: el precio del subyacente sugiere que la opción no sería ejercida hoy. En el caso de opciones call, esto se traduce en $S(0) < KP(0,T)$. Para opciones put, es $S(0) > KP(0,T)$.
- *Opción At-the-Money*: el precio del subyacente es cercano al valor presente del Strike ($S(0) \sim KP(0,T)$).
- *Valor Intrínseco de una Opción*: el valor que se obtendría de ejercer inmediatamente, tomando K para opciones americanas y $KP(0,T)$ para europeas. El valor intrínseco de una opción call americana en el tiempo t es $S(t) - K$ y para una opción put americana es $K - S(t)$. Para las europeas, estos valores son $S(t) - KP(0,T)$ y $KP(0,T) - S(t)$.

Dos observaciones son relevantes: primero, la definición de *moneyness* no pretende ser exacta; una opción se considera at-the-money si el precio del subyacente está "cerca" del Strike. Segundo, y más importante, formalmente el precio de comparación con el Strike no es el precio spot del subyacente, sino el precio forward. En realidad, el subyacente de una opción puede interpretarse como el forward del subyacente. Sin embargo, el mercado típicamente denomina las opciones at-the-money spot y at-the-money forward para exhibir explícitamente la distinción.

Dependencia del Tiempo a Expiración Es difícil sobreestimar la importancia del valor que el tiempo tiene en el el precio de una opción. Intuitivamente, más tiempo entre la compra de la opción y su expiración representa más posibilidad de que la opción eventualmente sea ejercida. Cuando queda poco tiempo para la expiración de una opción, es casi seguro que la suerte esté definida con respecto al ejercicio de la opción. Esta observación se plasma en el siguiente resultado, cuya veracidad se deja para comprobar al lector.

Proposición 14. $T_1 < T_2 \Rightarrow C^A(0,T_1,K) \leq C^A(0,T_2,K)$.

Se define el *Valor del Tiempo* de una opción, informalmente, como el valor de la opción por encima de su valor intrínseco: para una opción call, es $C - [S(t) - K]^+$ para el caso americano y $C - [S(t) - KP(0,T)]^+$ para el caso europeo, como se muestra cualitativamente en la figura 11; para una opción put americana es $P - [K - S(t)]^+$ y para una opción put europea es $P - [KP(0,T) - S(t)]^+$.

La primera observación es que el valor del tiempo es no negativo, como puede comprobarse mediante la Proposición 8. Esto confirma la intuición expresada anteriormente. La segunda es que

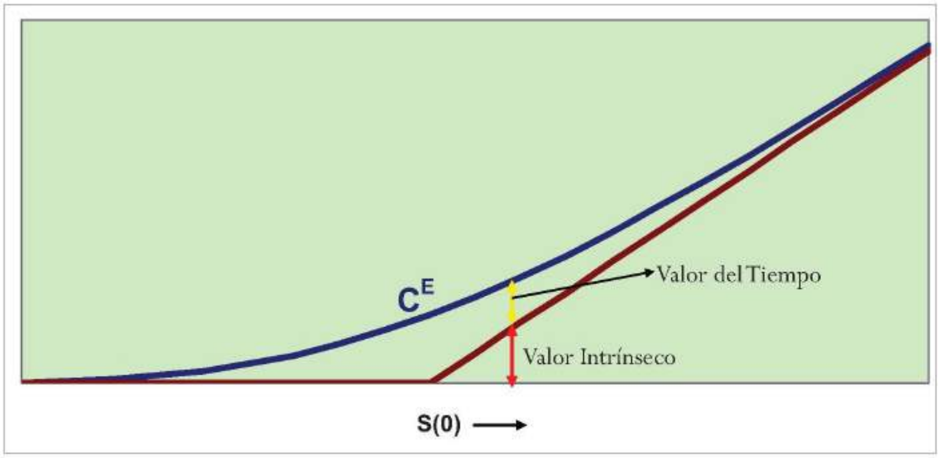

Figura 11: División de la prima de una call en su valor intrínseco, y el valor del tiempo.

el valor del tiempo es máximo cuando el precio del subyacente es igual al Strike (o su valor presente para el caso europeo). Gráficamente, el valor del tiempo de una opción call se representa al restar la línea punteada en la figura 9 de la línea continua.[19] El resultado gráfico se muestra en las figuras 12 y 13 para el caso europeo. En capítulos posteriores se observará más directamente que este valor del tiempo efectivamente proviene de la posibilidad de que la opción sea ejercida en un futuro (y de la magnitud del beneficio cuando se ejerce); esto, a su vez, se relaciona directamente con la volatilidad del precio del subyacente. Mientras más posibilidad de movimiento exista, hay más posibilidad de ejercer la opción. Desde otro punto de vista, el tiempo restante en la opción y la volatilidad del precio del subyacente son conceptos intercambiables. Es decir, dos subyacentes con volatilidades distintas pueden interpretarse como subyacentes con la misma volatilidad, pero cada uno siguiendo una escala del tiempo distinta: que las opciones adquieren un valor en el tiempo es consecuencia directa de la volatilidad en los precios.

[19] Según la definición dada en la presente discusión, la línea punteada mencionada en esta resta debería tener el pico en $S(0) = K$, y no en $P(0, T)K$.

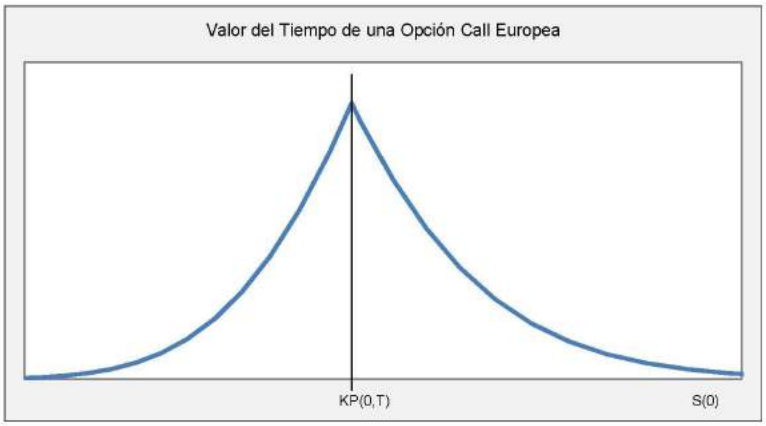

Figura 12: Valor del tiempo de una opción call europea.

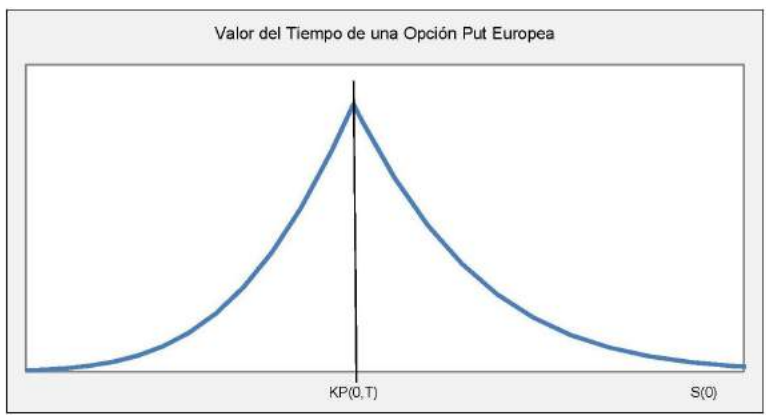

Figura 13: Valor del tiempo de una opción put europea.

5. Valoración: Modelo Binomial

Puros argumentos de arbitraje han permitido desarrollar ampliamente el análisis de valoración de derivados. Sin embargo, como se ha podido observar, solo se puede llegar hasta un punto; la valoración de opciones está en un punto descriptivo, pero no es posible seguir hacia un camino de mayor precisión cuantitativa sin un modelo de proyección del precio del subyacente. Esta necesidad no se presenta sin una alerta académica: miles de papers y estudios en proyección de precios de acciones han sido desarrollados, y claramente no hay una solución ampliamante universalizada. Luego, depender de modelos de proyección parecería traer a su fin la esperanza de construir una teoría homogénea de valoración. Sin embargo, Black, Scholes y Merton lograron dar una solución a este aparente obstáculo, desarrollando un paradigma de valoración que depende de forma algo más débil de estos modelos de proyección: ellos descubrieron que el valor de no arbitraje de una opción no depende del retorno esperado del subyacente. Es decir, la prima es independiente de la expectativa de rendimiento, lo cual ataca la intuición financiera: parecería ser claro que una opción call debería valer más en la medida en que el subyacente tiene un mayor retorno esperado.

En este capítulo se desarrolla un modelo simple - el binomial - para mostrar que esta intuición es incorrecta. El objetivo es establecer una plataforma conceptual para valorar derivados en general. De paso, se sientan las bases para poder desarrollar modelos más sofisticados. Sin embargo, esa sofisticación se elabora sobre la complejidad matemática de los modelos de difusión de los precios subyacentes, no sobre el concepto de valoración, que en esencia permanecerá invariante en la presente discusión: no se permiten oportunidades de arbitraje.

El entorno de mercado se establece con dos activos: uno libre de riesgo (es decir, con comportamiento determinístico) que se denominará bono, y uno con retornos estocásticos que se denominará acción. El bono puede interpretarse como una cuenta de ahorros que continuamente crece a una tasa de interés (anualizada) r. En general esta tasa puede variar en el tiempo (incluso de forma estocástica), pero normalmente se supondrá que es constante, y no se hará explícita una dependencia del tiempo. Por simplicidad, se supone que el precio inicial del bono es \$1. Así, el precio en el tiempo t es $B(t) = \mathrm{e}^{rt}$.[20] Por su parte, $S(t)$ denotará el precio de la acción en el tiempo t, tomando $S(0) = S_0$.

5.1. Modelo Binomial de un Periodo

El modelo más sencillo sobre el cual se puede analizar la estructura de una opción es el modelo binomial de un periodo: se toman dos tiempos; $t_0 = 0$, el tiempo inicial de valoración de la opción y $t_1 = T$, el tiempo final de expiración. El precio del subyacente en T es desconocido antes de T, pero

[20] En el caso de tasas de interés determinínísticas, la relación entre el bono y los factores de descuento descritos en capítulos anteriores es clara: $B(t) = \frac{1}{P(0,t)} = \mathrm{e}^{\int_0^t r(s)ds}$.

se supone que solo hay dos estados posibles del mundo. Financieramente, es conveniente interpretar cada estado del mundo según el retorno de la acción. Es decir, se comienza por denominar los estados posibles del mundo en T como "arriba" y "abajo"; al estado de arriba se le asigna una probabilidad p,[21] y al de abajo de $1-p$. Se modela la acción mediante su retorno anualizado en cada estado: u en el de arriba y d en el de abajo, donde $d < u$. Así, el precio de la acción en T puede describirse como sigue:

$$S(T) = \begin{cases} S_0 e^{uT}, & \text{con probabilidad } p \in (0,1), \\ S_0 e^{dT}, & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Proposición 15. El mercado de un bono y una acción descrito con el modelo binomial de un periodo no admite arbitraje si y solo si $d < r < u$.

Demostración. Si $r \leq d$, se tiene la oportunidad de arbitraje:

1. Comprar una acción. Flujo de caja: -$\$S(0)$.
2. Vender $S(0)$ bonos. Flujo de caja: $\$S(0)$.

Esta estrategia no requiere flujo de caja neto inicial. Se mantiene el portafolio el tiempo $t = T$. momento en el cual se liquidan las posiciones:

1. Vender la acción. Flujo de caja:

$$+S(T) = \begin{cases} S_0 e^{uT}, & \text{en el estado de arriba, con probabilidad } p \in (0,1), \\ S_0 e^{dT}, & \text{en el estado de abajo, con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

2. Comprar $S(0)$ bonos. Flujo de caja: $-\$S(0)e^{rt}$, independiente del estado.

En el estado de arriba se gana plata con certeza, y en el de abajo seguro no se pierde, lo cual es un arbitraje. El caso $u \leq r$ produce un arbitraje con la estrategia inversa, concluyendo la primera parte de la equivalencia.

La dirección opuesta se deja como ejercicio para el lector. □

El objetivo es valorar derivados en este modelo. Para ser precisos, se considera un derivado con expiración T y pago final $\psi(S(T))$.[22] El pago final de este instrumento se exhibe en la Figura 14, para el caso de una opción call con Strike K. La figura permite motivar el avance: se tiene un instrumento financiero que en el tiempo T paga $\psi(e^{uT}S(0))$ con probabilidad p y $\psi(e^{dT}S(0))$ con probabilidad $1-p$; por simplicidad, se denotan por ψ_u y ψ_d estas cantidades. La microeconomía

[21] Se exige $p \in (0,1)$ para evitar el caso degenerado en que realmente solo hay un estado posible.
[22] En modelos de un periodo sobra la distinción entre derivados estilo europeo y americano.

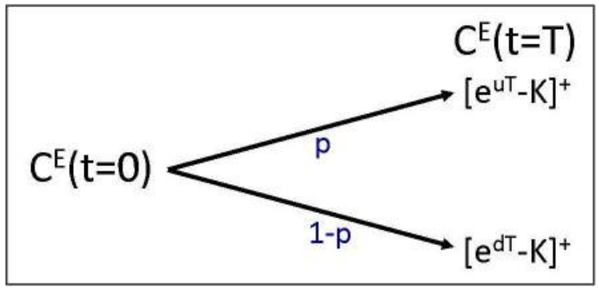

Figura 14: Flujo de caja de una opción call en el modelo binomial de un periodo.

clásica guía hacia la ruta intuitiva: el valor presente de esta "lotería" debe ser igual al valor presente del promedio de los pagos futuros, ajustado por el nivel de aversión al riesgo del inversionista. Este esquema es infortunado por la dependencia a la aversión al riesgo, lo cual hace de éste un camino en el que cualquier resultado debe ser considerado a la luz de las imprecisiones introducidas. En adición, se debería buscar un precio de equilibrio, en el cual la demanda y la oferta por el derivado se crucen, lo cual exige, en adición, calibrar el apetito desagregado a nivel del mercado. Es, sin embargo, interesante avanzar suponiendo que todos los participantes del mercado son neutrales al riesgo. En este caso se puede formular sencillamente un precio para el derivado:

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \frac{1}{B(T)}\big(p\psi_u + (1-p)\psi_d\big) \\ &= P(0,T)\big(p\psi_u + (1-p)\psi_d\big) \\ &= P(0,T)\mathbf{E}[\psi(S(T))]. \end{aligned} \tag{14}$$

La audacia de Black, Scholes y Merton (BSM) consistió en enfrentar esta intuición cambiando el esquema de análisis; el concepto usado, plasmado en la siguiente proposición, es muy fuerte intuitivamente, hasta tal punto que un analista desprevenido difícilmente pensaría que esta herramienta serviría para valorar derivados:

Proposición 16. Si el mercado cumple las suposiciones de la sección 4.3, dos portafolios con idénticos flujos de caja en el futuro deben tener el mismo valor inicial.

Demostración. Si los dos portafolios tuvieran valores iniciales distintos, se procedería a invertir en aquél con menor precio inicial, tomando una posición corta en el otro (usando el mismo nocional final), generando una oportunidad de arbitraje, lo cual es prohibido en el mercado considerado. □

La atención de BSM se enfocó en generar un portafolio que fuera fácilmente valorable en el tiempo 0, y que además tuviera los mismos flujos de caja futuros que el derivado considerado. Es en este punto donde haber comenzado con el modelo binomial facilita el proceso. Replicar flujos en dos estados del mundo es una tarea más sencilla que hacerlo simultáneamente en infinitos estados. El mercado, en adición, no permite muchas posibilidades: solo se tiene la posibilidad de transar bonos y acciones. Luego el planteamiento se reduce a explorar la posibilidad de comprar x acciones y y bonos de tal forma que el portafolio resultante sea indistinguible del derivado en el futuro. Es decir,

$$x\mathrm{e}^{uT}S(0) + y\mathrm{e}^{rT} = \psi_u \tag{15}$$
$$x\mathrm{e}^{dT}S(0) + y\mathrm{e}^{rT} = \psi_d. \tag{16}$$

Este sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas arroja el siguiente resultado:

$$x = \frac{\psi_u - \psi_d}{S(0)(\mathrm{e}^{uT} - \mathrm{e}^{dT})} \tag{17}$$
$$y = \mathrm{e}^{-rT}\frac{\mathrm{e}^{uT}\psi_d - \mathrm{e}^{dT}\psi_u}{\mathrm{e}^{uT} - \mathrm{e}^{dT}}. \tag{18}$$

En el futuro, desde un punto de vista puramente financiero, el portafolio conformado por x acciones y y bonos es indistinguible del derivado analizado. Por lo tanto, de la Proposición 16 se deduce que los valores en el tiempo inicial deben ser idénticos. Es decir,

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= xS(0) + y \\
&= \mathrm{e}^{-rT}\frac{(\mathrm{e}^{rT} - \mathrm{e}^{dT})\psi_u + (\mathrm{e}^{uT} - \mathrm{e}^{rT})\psi_d}{\mathrm{e}^{uT} - \mathrm{e}^{dT}} \\
&= P(0,T)\big(p^*\psi_u + (1-p^*)\psi_d\big), \\
&= P(0,T)\mathbf{E}^*[\psi(S(T))],
\end{aligned} \tag{19}$$

donde

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{rT} - \mathrm{e}^{dT}}{\mathrm{e}^{uT} - \mathrm{e}^{dT}}, \tag{20}$$

y $\mathbf{E}^*$ denota el operador de valor esperado usando p^* en lugar de p. La primera observación es la sorprendente similitud de la expresión (19) con (14). En efecto, solo se cambia p por p^*. La segunda observación es que $p^* \in (0,1)$, si $d < r < u$; es decir, si se supone que no hay oportunidades de arbitraje (en virtud de la Proposición 15). Luego p^* puede interpretarse como una probabilidad, aunque en principio no tiene ninguna relación con p.[23]

Finalmente, las cantidades que un agente debe operar en el bono y la acción para poder replicar los flujos finales del derivado representan los "deltas" correspondientes a esos activos. Es decir, el análisis arroja como resultado secundario el camino que debe seguir un agente interesado en cubrir los flujos de caja de un derivado.

Ejemplo 8. Valoración de Opción Call en el Modelo Binomial de un Periodo. En el contexto del modelo binomial de un periodo se considera un mercado con tasas de interés iguales

[23] Formalmente, estas dos probabilidades sí tienen relación: son equivalentes; es decir, eventos con probabilidad 0 bajo p también tiene probabilidad 0 bajo p^*, y viceversa.

a 0, una acción con precio inicial 100, y posibles precios futuros de 200 y 50 en los estados de "arriba" y "abajo", respectivamente. La probabilidad del estado de "arriba" es 50 %. Finalmente, se considera una opción call sobre la acción, con Strike de 100. La Figura 15 representa la situación. Las ecuaciones correspondientes a la cobertura de la opción para los dos estados son:

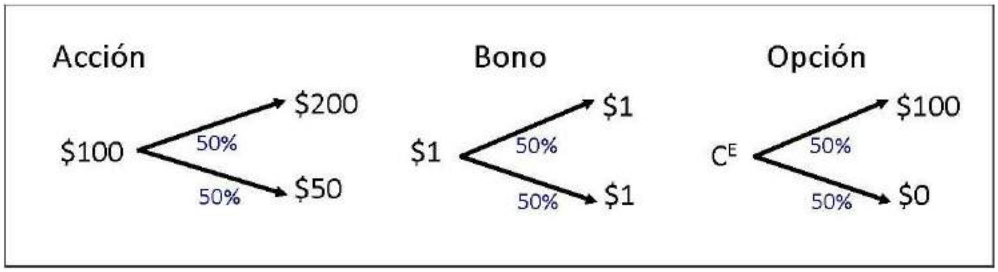

Figura 15: Modelo binomial de un periodo con un bono, una acción, y una opción.

$$200x + y = 100 \tag{21}$$

$$50x + y = 0, \tag{22}$$

cuya solución es $x = \frac{2}{3}$ y $y = -\frac{100}{3}$. Así, un portafolio que inicialmente tenga una posición larga en $\frac{2}{3}$ acciones y una posición corta en $\frac{100}{3}$ bonos tendrá un valor de mercado de \$100 en el estado de "arriba" y \$0 en el estado de "abajo". El valor inicial de este portafolio es $\$\frac{100}{3}$, que debe ser el precio inicial de la opción para evitar una oportunidad de arbitraje.

Este precio inicial contrasta con el valor esperado del pago final que es, en valor presente, igual a \$50. Un inversionista que considere este cálculo desprevenido, y extraiga una prima por riesgo de, por ejemplo, \$10, estaría dispuesto a comprar la opción por \$40. Un agente podría aprovechar esta situación vendiéndole la opción por este precio, y usando parte de los fondos para construir el portafolio replicante, que exige solo \$33.33, con lo cual puede responder por los flujos de la opción en cualquier escenario. El residuo de \$6.67 es la representación del arbitraje permitido.

Probabilidad de Neutralidad al Riesgo. En resumen, un inversionista puede replicar el pago final del derivado mediante un portafolio cuyo valor inicial es el valor presente del pago final esperado del derivado, **calculando este valor esperado con la probabilidad p^*, que es posiblemente distinta de la probabilidad original** p.

Es importante hacer la distinción entre las dos probabilidades. Se denomina p^* la *probabilidad de neutralidad al riesgo* o la *probabilidad equivalente de martingala*; para ser precisos, en adelante se denomina p la *probabilidad física*.

Inicialmente, p^* es una cantidad artificial, resultado de manipulaciones aritméticas. Sin embargo, tiene una interpretación financiera importante:

$$P(0,T)\mathbf{E}^*[S(T)] = \mathrm{e}^{-rT}\big(p^* S(0)\mathrm{e}^{uT} + (1-p^*)S(0)\mathrm{e}^{dT}\big) = S(0). \tag{23}$$

Es decir, bajo esta nueva probabilidad artificial, la acción crece, en promedio, a la misma tasa que el bono. Esto es consistente con un mundo en el que inversionistas ignoran el riesgo para tomar decisiones de inversión. De ahí surge el nombre de probabilidad de neutralidad al riesgo. Más aún, en contextos generales de aquí se define una probabilidad de neutralidad al riesgo: como aquélla bajo la cual se igualan los retornos esperados de los activos de la economía.

La Proposición 15 puede reescribirse como una forma particular del Primer Teorema Fundamental de Matemáticas Financieras:

Teorema 1. *PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS.* Se considera un mercado de un bono y una acción descrito con el modelo binomial de un periodo que cumple las suposiciones de la sección 4.3. Este modelo no admite arbitraje si y solo si existe una probabilidad de neutralidad al riesgo.

En el contexto del modelo binomial de un periodo este resultado parece poco significante: lo único que se ha pedido es que el retorno del bono se encuentre entre los dos posibles retornos de la acción, y esto resulta ser equivalente a que no exista arbitraje en el modelo, y a que la ecuación (19) tenga sentido probabilístico. Sin embargo, como se verá adelante, este resultado se mantiene en extensiones del modelo, incluso en tiempo continuo, y en esos casos la existencia de esa probabilidad es valiosa en la búsqueda de un esquema de valoración de derivados.

Completitud.

Definición 2. Un mercado es completo si no admite arbitraje y todo derivado puede ser replicado con los instrumentos financieros de la economía.

El modelo considerado tiene dos instrumentos: el bono y la acción. Sin embargo, siendo binomial de un periodo, cualquier derivado puede ser representado por dos números (valor "arriba" y valor "abajo"), y por lo tanto puede ser replicado con el bono y la acción, siempre y cuando estos no sean linealmente dependientes; esto en particular se puede asegurar dado que $d < u$. Así, **el modelo binomial de un periodo es completo** en la medida en que no admita arbitraje; es decir, si $d < r < u$.

Si se permitiera el caso extremo $d = r = u$, este modelo no admitiría arbitraje, pero no sería completo. En efecto, si se considera un "derivado" que tuviera un valor distinto en los dos estados, se llegaría a dos ecuaciones lineales con iguales coeficientes para x y y, pero distintos valores resultantes, que no tendría solución.[24] Para este caso extremo, cualquier función de probabilidad cumpliría (23): existirían infinitas probabilidades de neutralidad al riesgo.

Teorema 2. *SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS.* Se considera un mercado de un bono y una acción descrito con el modelo binomial de un periodo que cumple las suposiciones de la sección 4.3; se supone que este modelo no admite arbitraje. El modelo es completo si y solo si la probabilidad de neutralidad al riesgo es única.

Calibración del Modelo. El modelo binomial de un periodo tiene dos parámetros a definir, excluyendo T, que puede tomarse como el horizonte de expiración del derivado en estudio, y $S(0)$ y r, que pueden tomarse directamente del mercado.[25] Estos son u y d, que cumplen con la labor de proyectar la evolución del precio de la acción.

Para calibrar u y d se necesitan tener una distribución a la cual calibrar. Esto plantea una disyuntiva, porque hay *dos* distribuciones factibles. Una, la física, y otra, la de neutralidad al riesgo. Si se observan derivados en el mercado, se procedería a encontrar los valores de u y d que menos error produjeran al valorar los derivados observados. Si se observa solo un derivado, se tiene una ecuación con dos variables, y es típico determinar una ecuación auxiliar arbitraria (un ejemplo es que la probabilidad de neutralidad al riesgo resultante sea 50 %; otro ejemplo es $u = -d$).

Ejemplo 9. Calibración del Modelo Binomial de un Periodo. Se considera el Ejemplo 8, con $T = 1$, cambiando el orden del problema: se desconocen los valores finales de la acción (y por lo tanto de la opción), pero se tiene que el precio inicial de la opción es \$20. Observando solo un derivado, se exige arbitrariamente que $p^* = 50\,\%$.

Ahora, $d < 0 < u$, luego la opción no se ejerce en el estado de “abajo”, pero sí tiene valor positivo en el estado de “arriba”. De (19),

$$\$20 = p^*[100\mathrm{e}^{uT} - 100]^+ = 50\,\% \times 100[\mathrm{e}^u - 1]^+,$$

de donde se despeja $u = 33.6\,\%$, y, a partir de la ecuación (20), $d = -51.1\,\%$.

En el caso menos afortunado en que no se observan instrumentos de mercado que fueran valorables con este modelo, típicamente se requiere un modelador financiero que determine una

[24] En este punto se puede cuestionar la definición formal de derivado. Si es un instrumento cuyo valor final depende exclusivamente del valor del subyacente, por construcción cualquier derivado en este modelo tendría igual valor en los dos estados del mundo. Si embargo, si el derivado se define como un instrumento cuyo pago final es una variable aleatoria en el espacio probabilístico, entonces podría presentar valores distintos en los dos estados; este es el sentido usado en esta discusión.

[25] Puede haber discusión con respecto a la tasa de interés, ya que ésta varía con el plazo y con la calidad crediticia del deudor. Para el plazo se puede tomar T, pero para la calidad crediticia el modelo planteado supone homogeneidad entre los participantes, de forma tal que, por ahora, la escogencia de esta r se supone unívoca.

distribución para el retorno futuro de la acción; es importante notar que el modelador debe calibrar también p, cantidad que es irrelevante para el propósito de valorar derivados si se cuenta con u y d, como en el ejemplo anterior. En este caso es natural establecer que u, d y p sean calibrados a partir de los primeros tres momentos de esta distribución (media, varianza y sesgo). Como en el ejemplo anterior, es común que se use una ecuación arbitraria para usar solo los primeros dos momentos de la distribución dada.

Ejemplo 10. Calibración del Modelo Binomial de un Periodo a Partir de la Distribución Física. Un analista de una acción determina un modelo de distribución normal para el retorno *logarítmico* anualizado de una acción, con media $\mu = 5\,\%$ y varianza $\sigma^2 = 10\,\%^2$. El desarrollador de modelos de derivados arbitrariamente determina $p = 50\,\%$ y dispone a calibrar un modelo binomial de un periodo que sea cercano al modelo del analista usando las siguientes dos ecuaciones (notando que se usan los retornos logarítmicos en vez de los aritméticos):

$$
\begin{aligned}
pu + (1-p)d &= \mu \\
pu^2 + (1-p)d^2 - \mu^2 &= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

La solución es

$$
\begin{aligned}
u &= \mu + \sigma \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}} = 15\,\% \\
d &= \mu - \sigma \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}} = -5\,\%.
\end{aligned}
$$

No es coincidencia que la solución de representar una distribución normal con dos números equiprobables sea que los dos números se encuentren a una desviación estándar de la media en direcciones distintas.

5.2. Modelo Binomial de N Periodos

El modelo binomial de un periodo marca la dirección a seguir en la valoración de derivados, pero es poco útil debido a su pobreza estocástica. La extensión a N periodos puede hacerse de forma bastante general: inicialmente se fija un horizonte de tiempo T, y se determina una partición de este periodo en N intervalos demarcados por los tiempos $0 = t_0, t_1, \ldots, t_N = T$, no necesariamente espaciados de forma uniforme. Cada tiempo marca la creación de dos ramas nuevas a partir de cada nodo existente; en efecto, por cada nodo del árbol existente en un tiempo dado t_k ($k = 0, 1, \ldots, N-1$), se construye un modelo binomial de un periodo ($[t_k, t_{k+1}]$), como se muestra en la Figura 16. En su forma más general, este modelo no es uniforme en los parámetros ni en la longitud de los periodos. En efecto, el modelo puede verse como una unión de $2^N - 1$ modelos de un periodo, cada uno con

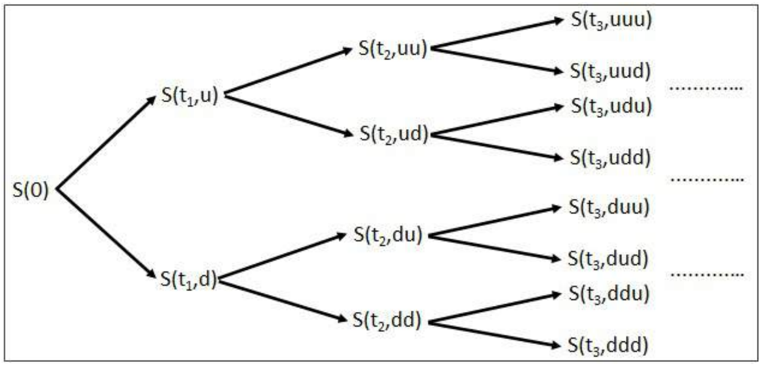

Figura 16: Modelo binomial general de varios periodos.

sus propios valores de r, d y u. Típicamente la partición del tiempo es la única característica que se mantiene invariante en los distintos caminos del árbol, aunque incluso esta restricción puede flexibilizarse.

La valoración de derivados en este modelo acoge e itera el resultado encontrado en el modelo binomial de un periodo. La complejidad incurrida por el beneficio en precisión es computacional, ya que se debe hacer la valoración de un periodo en $2^N - 1$ subárboles. La técnica de valoración es natural: conociendo el valor del derivado en el tiempo $T = t_N$, se utiliza la técnica de valoración del caso de un perido para encontrar el valor del derivado en cada uno de los nodos del tiempo t_{N-1}. Se sigue iterando hacia atrás con esta metodología de *backward-induction* hasta llegar al primer nodo, en el tiempo 0, encontrando así el valor inicial del derivado. Esta metodología inclusive permite valorar derivados estilo americano, cuidando en cada nodo de evaluar la mejor alternativa: ejercer el derivado inmediatamente - en cuyo caso el valor es el que se obtiene de ejercerlo -, o mantenerlo vigente hasta el siguiente periodo - en cuyo caso el valor es el obtenido según la valoración en un periodo; es decir, el valor presente del valor esperado del derivado en el siguiente periodo, usando las probabilidades de neutralidad al riesgo.

Vale la pena notar que la probabilidad de neutralidad al riesgo es, en general, distinta en cada subárbol. Por otro lado, a partir de la valoración en cada subárbol dada por (19) se puede generalizar el método de valoración para el árbol entero, identificando que la probabilidad de un camino dado es la multiplicación de las probabilidades de cada arista del camino (lo cual supone saltos independientes en cada periodo del tiempo). Es decir, el valor inicial de un derivado estilo europeo cumple

$$\psi(0) = \mathbf{E}^*[P(0,T)\psi(S(T))]. \tag{24}$$

Esta igualdad considera que el factor de descuento puede variar de forma estocástica después del primer periodo. Claramente el caso americano no cumpliría esta formulación: la posibilidad de ejercer el derivado de forma anticipada podría dar un valor superior al valor de mantener el derivado vivo. De la misma forma, la naturaleza iterativa del modelo binomial general hace que cumpla (23), teniendo cuidado en permitir la posibilidad de tasas de interés estocásticas:

$$\mathbf{E}^*[P(0,T)S(T)] = S(0). \tag{25}$$

La expresión anterior se puede extraer de (24), si se valora una opción call con Strike 0, la cual debe tener igual valor que la acción subyacente. Finalmente, los Teoremas Fundamentales también aceptan sus versiones extendidas a este modelo, demostraciones que se dejan como ejercicio al lector.

Teorema 3. *PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS.* Se considera un mercado de un bono y una acción descrito con el modelo binomial de N periodos general que cumple las suposiciones de la sección 4.3. Este modelo no admite arbitraje si y solo si existe una probabilidad de neutralidad al riesgo.

Teorema 4. *SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS.* Se considera un mercado de un bono y una acción descrito con el modelo binomial de N periodos general que cumple las suposiciones de la sección 4.3; se supone que este modelo no admite arbitraje. El modelo es completo si y solo si la probabilidad de neutralidad al riesgo es única.

Modelo Binomial Recombinante. En su forma más general, el carácter exponencial del modelo binomial hace que el número de nodos crezca muy rápidamente, por lo que típicamente se trabaja con árboles *recombinantes*, en donde una "subida" seguida de una "bajada" termina en el mismo punto que una "bajada" seguida de una "subida". En este caso, al cabo de N periodos el modelo tiene $N+1$ nodos finales.

Ejemplo 11. Valoración de Opción Put Americana en un Modelo Binomial Recombinante de Tres Periodos. Así como en el ejemplo 8, se considera un mercado con tasas de interés

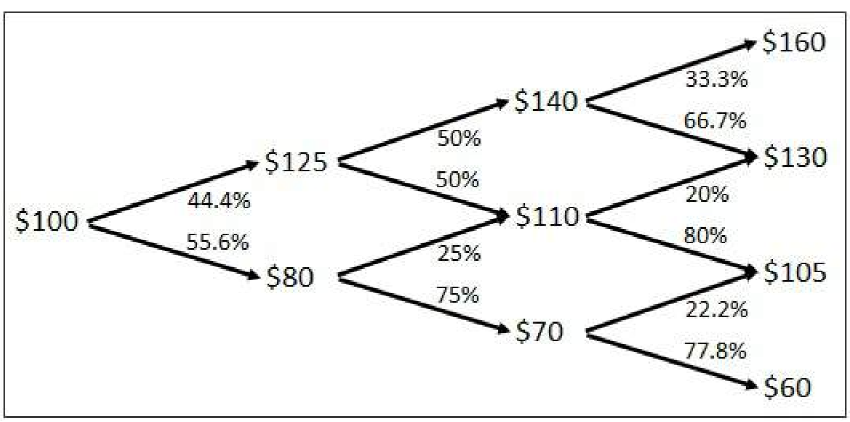

Figura 17: Modelo binomial de tres periodos: precio de la acción y probabilidades de neutralidad al riesgo.

iguales a 0, y una acción con precio inicial 100. Los posibles precios futuros a tres periodos se modelan según se muestra en el árbol de la Figura 17. Ahora se considera una opción put *americana* sobre la acción, con Strike de 110. En particular, la opción podría ejercerse en el tiempo 0 para obtener un pago de \$10; sin embargo, no es claro superficialmente que esto sea mejor idea que esperar y mantener la opción viva. La única forma de determinar la mejor alternativa para el dueño de la opción es valorar la opción ignorando la posibilidad de ejercerla en el tiempo 0. Asimismo, los nodos intermedios del árbol exigen una comparación entre las dos alternativas (ejercer contra mantener viva la opción). Ahora, para la alternativa de mantener la opción viva, en cada subárbol se tiene la situación del modelo binomial de un periodo, que requiere tan solo del cálculo de las probabilidades de neutralidad al riesgo, números mostrados en la Figura 17, calculados a partir de (20). Finalmente, la valoración del derivado comienza en el tiempo final, y se devuelve en el árbol usando (19), y respetando la posibilidad de ejercer anticipadamente la opción, situación que se plantea numéricamente en la Figura 18. Puede notarse que en todos los estados, y todos los tiempos,

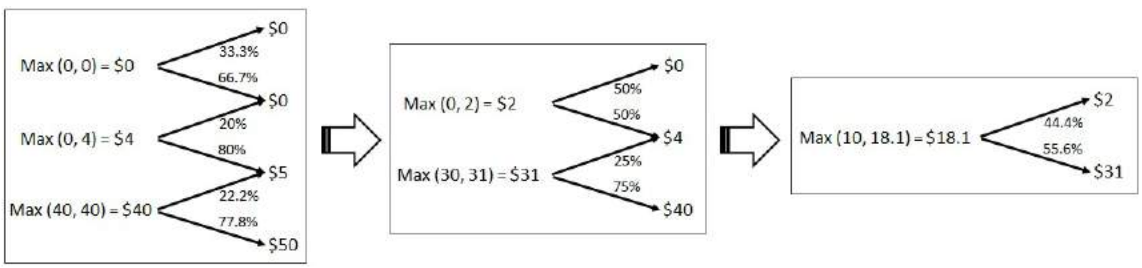

Figura 18: Valoración de una opción put americana en el modelo binomial de tres periodos.

ejercer la opción traería un pago menor o igual que mantenerla viva, razón por la cual en ningún nodo es óptimo ejercer anticipadamente (en el nodo de "abajo" del tiempo t_2 se da una igualdad, luego en ese caso el dueño de la opción sería indiferente entre mantener la opción viva y ejercerla).

Un caso particular de los modelos recombinantes es aquél en que los parámetros (r, d, u, $\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{T}{N}$) se mantienen constantes en el árbol. En esta situación, la probabilidad de neutralidad al riesgo es igual en cada subárbol a la constante dada por la expresión (20), ajustando por el tiempo de cada subárbol:

$$p^* = \frac{\mathrm{e}^{r\Delta t} - \mathrm{e}^{d\Delta t}}{\mathrm{e}^{u\Delta t} - \mathrm{e}^{d\Delta t}}. \tag{26}$$

En el tiempo T se tienen $N+1$ nodos. Considerando que el número de caminos que llegan al j-ésimo nodo (de abajo a arriba) es $\binom{N}{j}$, la probabilidad (de neutralidad al riesgo) de llegar a ese nodo es $\binom{N}{j} p^{*j}(1-p^*)^{N-j}$. Esto permite corroborar (25) directamente, usando la expansión binomial de

Newton:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*[P(0,T)S(T)] &= \mathrm{e}^{-rT}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}p^{*j}(1-p^*)^{N-j}S(0)\mathrm{e}^{(ju+(N-j)d)\Delta t}\\ &= \mathrm{e}^{-rT}S(0)\big(p^*\mathrm{e}^{u\Delta t}+(1-p^*)\mathrm{e}^{d\Delta t}\big)^N\\ &= S(0).\end{aligned}$$

Adicionalmente, en este caso particular, (24) toma la forma

$$\psi(0) = \mathrm{e}^{-rT}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}p^{*j}(1-p^*)^{N-j}\psi(S(0)\mathrm{e}^{(ju+(N-j)d)\Delta t}). \tag{27}$$

Extensión: Modelo Trinomial. Los modelos discretos (en tiempo y en precios) pueden extenderse para aceptar ramificaciones superiores a dos. De hecho, desde cada nodo se puede definir un número de estados del mundo que puede no ser constante. La extensión más directa es la de árboles trinomiales, en donde de cada nodo se desprenden tres ramas. La valoración conceptual sigue la planteada en el modelo binomial, aunque evidentemente se agrega riqueza estocástica.

Esta riqueza no viene gratis: para lograr construir portafolios replicantes en un modelo trinomial de un periodo que tenga una acción y un bono se requeriría resolver un sistema de dos incógnitas (número de acciones y de bonos) en tres ecuaciones (los tres estados del mundo): este es un mercado incompleto; intuitivamente, no hay suficiente riqueza financiera para empatar con la riqueza estocástica del modelo. Para lograr matemáticamente la replicación, es necesario agregar un instrumento financiero **independiente** de los otros dos, de forma que se *complete el mercado*.

Se toman dos tiempos; $t_0 = 0$ y $t_1 = T$. Existe un bono y dos acciones. El precio de las acciones es desconocido en T, y se suponen tres estados posibles, denominados "arriba", "medio" y "abajo", y se modelan dos acciones mediante sus retorno anualizado en cada estado: u_i en el de arriba, m_i en el de la mitad y d_i en el de abajo, con $d_i < m_i < u_i$, $i = 1, 2$. El precio de la acción i en T puede asumir los valores $S_i(0)\mathrm{e}^{u_iT}$, $S_i(0)\mathrm{e}^{m_iT}$ y $S_i(0)\mathrm{e}^{d_iT}$. El precio del bono en T es e^{rT}.

Ahora, se considera un derivado con expiración T y pago final $\psi(S(T))$ (definido en cada estado como ψ_u, ψ_m y ψ_d), y se retoma la idea de generar un portafolio replicante con x unidades de la acción 1, y de la acción 2 y z bonos. Las ecuaciones que hacen de éste un portafolio replicante son:

$$
\begin{aligned}
x\mathrm{e}^{u_1 T} S_1(0) + y\mathrm{e}^{u_2 T} S_2(0) + z\mathrm{e}^{rT} &= \psi_u \\
x\mathrm{e}^{m_1 T} S_1(0) + y\mathrm{e}^{m_2 T} S_2(0) + z\mathrm{e}^{rT} &= \psi_m \\
x\mathrm{e}^{d_1 T} S_1(0) + y\mathrm{e}^{d_2 T} S_2(0) + z\mathrm{e}^{rT} &= \psi_d
\end{aligned}
$$

Este sistema lineal arroja el siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{S_1(0)} \frac{\psi_u(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) - \psi_m(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \psi_d(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T})}{\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) - \mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T})} \\
y &= \frac{1}{S_2(0)} \frac{\psi_u(\mathrm{e}^{m_1 T} - \mathrm{e}^{d_1 T}) - \psi_m(\mathrm{e}^{u_1 T} - \mathrm{e}^{d_1 T}) + \psi_d(\mathrm{e}^{u_1 T} - \mathrm{e}^{m_1 T})}{\mathrm{e}^{u_2 T}(\mathrm{e}^{m_1 T} - \mathrm{e}^{d_1 T}) - \mathrm{e}^{m_2 T}(\mathrm{e}^{u_1 T} - \mathrm{e}^{d_1 T}) + \mathrm{e}^{d_2 T}(\mathrm{e}^{u_1 T} - \mathrm{e}^{m_1 T})} \\
z &= \left(\frac{\psi_u(\mathrm{e}^{(m_1+d_2)T} - \mathrm{e}^{(m_2+d_1)T}) + \psi_m(\mathrm{e}^{(u_2+d_1)T} - \mathrm{e}^{(u_1+d_2)T}) + \psi_d(\mathrm{e}^{(u_1+m_2)T} - \mathrm{e}^{(u_2+m_1)T})}{\mathrm{e}^{rT}(\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) - \mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T}))} \right)
\end{aligned}
$$

El valor inicial de este portafolio replicante, que debe coincidir con el valor inicial del derivado, es

$$
\begin{aligned}
\psi(0) &= xS_1(0) + yS_2(0) + z \\
&= \mathrm{e}^{-rT}\left(p_u^* \psi_u + p_m^* \psi_m + p_d^* \psi_d\right), \\
&= P(0,T)\mathbf{E}^*[\psi(S(T))],
\end{aligned}
\tag{28}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
p_u^* &= \frac{\mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{d_2 T} - \mathrm{e}^{rT}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{rT} - \mathrm{e}^{m_2 T}) + \mathrm{e}^{rT}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T})}{\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) - \mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T})} \\
p_m^* &= \frac{\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{rT} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{rT}) + \mathrm{e}^{rT}(\mathrm{e}^{d_2 T} - \mathrm{e}^{u_2 T})}{\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) - \mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T})} \\
p_d^* &= \frac{\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{rT}) + \mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{rT} - \mathrm{e}^{u_2 T}) + \mathrm{e}^{rT}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T})}{\mathrm{e}^{u_1 T}(\mathrm{e}^{m_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) - \mathrm{e}^{m_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{d_2 T}) + \mathrm{e}^{d_1 T}(\mathrm{e}^{u_2 T} - \mathrm{e}^{m_2 T})}
\end{aligned}
$$

y $\mathbf{E}^*$ denota el operador de valor esperado usando estas probabilidades, que son las de neutralidad al riesgo. Se deja al lector comprobar que la suma de estos tres números es 1, analizar las condiciones bajo las cuales estos números efectivamente pueden ser interpretados como probabilidades (es decir, $p_u^*, p_m^*, p_d^* \in (0,1)$), y verificar que con estos números se cumple (23).

6. Movimiento Browniano y Principios de Cálculo Estocástico

El modelo binomial ofrece las bases conceptuales necesarias para poder valorar derivados en modelos de tiempo continuo. Sin embargo, esta extensión no es trivial, considerando que la pretensión de replicar el pago final de un derivado mediante la construcción de un portafolio que en principio debe ser rebalanceado *continuamente* exige un tratamiento cuidadoso de la plataforma de análisis.

La piedra angular de este ejercicio de extensión es la realización de que el modelo binomial converge, al considerar particiones (Δt) cada vez más pequeñas, al Movimiento Browniano (MB), que es el proceso estocástico continuo que exhibe la noción de la *caminata aleatoria pura.* Algo sorprendentemente, el Teorema de Representación de Martingalas establece que cualquier proceso estocástico continuo que evolucione según la información (filtración) generada por un Movimiento Browniano puede ser expresado en términos de este Movimiento Browniano: en efecto, debe ser una *integral estocástica* definida sobre este MB. En particular, si un analista quiere especificar un modelo continuo cuya fuente de incertidumbre surge de la estocasticidad de un MB, entonces solo se deben especificar un par de procesos (*drift* y volatilidad).

6.1. Movimiento Browniano

Intuititivamente, una caminata aleatoria representa la posición de un proceso que en cada tiempo (discretizado apropiadamente) “avanza” o “retrocede” una unidad espacial, de forma simétrica y puramente aleatoria (por ejemplo, basado en el lanzamiento de una moneda justa). Formalmente se definen estos resultados unitarios (cada lanzamiento de la moneda) mediante una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_i:

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{probabilidad } 50\,\% \\ -1, & \text{probabilidad } 50\,\% \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Claramente $\mathbf{E}[X_i] = 0$ y $Var[X_i] = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Se define la caminata aleatoria $\{S_i : i = 0, 1, 2, \ldots\}$ naturalmente como la acumulación de “avances” o “retrocesos” sucesivos:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{30}$$

Se tiene $\mathbf{E}[S_n] = 0$ y $Var[S_n] = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. La Figura 19 muestra varios caminos posibles para este proceso. No sobra notar que después de n periodos existen 2^n posibles caminos, y este proceso estocástico puede entenderse como la colección de estos caminos, cada uno con probabilidad $\frac{1}{2^n}$ de ocurrencia. El objetivo es extender este concepto a tiempo continuo, intuitivamente permitiendo

Figura 19: Cinco realizaciones de la Caminata Aleatoria, S, hasta $n = 30$.

que la posición del proceso cambie, no en tiempos discretos, sino en todo $\mathbb{R}^+$, primero tomando discretizaciones del tiempo cada vez más finas, y luego tomando el límite. Para lograr esto, es necesario reducir la unidad de movimiento apropiadamente, en la medida en que la unidad de tiempo se reduce y converge a 0. Como será evidente más adelante, la escala apropiada de reducción en la posición es la raíz de la reducción en la discretización del tiempo: reducir el espacio en igual escala que el tiempo llevaría a 0 el proceso límite.

Se fija $n \in \mathbb{N}$, y se considera la discretización del tiempo definida con $\Delta t = \frac{1}{n}$:

$$t_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \ldots$$

Para $T = k/n$ ($k = 0, 1, \ldots$), se define la variable aleatoria

$$B^{(n)}(T) = \frac{S_k}{\sqrt{n}}.$$

Así, $\{B^{(n)}(\frac{k}{n}) : k = 0, 1, \ldots\}$ es un proceso estocástico discreto, similar a S, pero en tiempos y distancias reducidas. En particular, se tiene $\mathbf{E}[B^{(n)}(\frac{k}{n})] = 0$ y $Var[B^{(n)}(\frac{k}{n})] = \frac{k}{n} = T$. A nivel de ejemplo, la Figura 20 muestra el histograma correspondiente a $B^{(6)}(2)$. Su semejanza a una distribución normal no es coincidencia, como puede anticiparse del Teorema del Límite Central.

Otra anotación importante es la independencia entre "saltos" de este proceso; es decir, si $k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 < k_2$, entonces $B^{(n)}(\frac{k_2}{n}) - B^{(n)}(\frac{k_1}{n})$ es independiente de $B^{(n)}(\frac{k_1}{n})$, como puede deducirse de la independencia de los X_i.

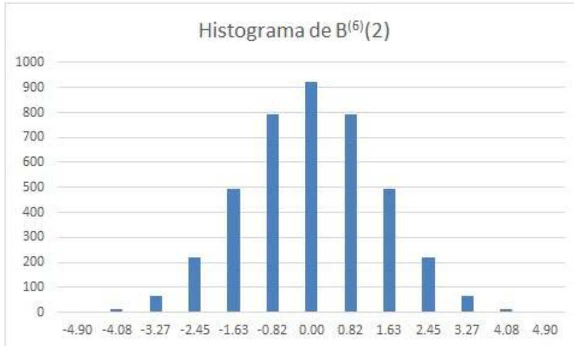

Figura 20: Histograma $B^{(6)}(2)$. Cada movimiento es de $\frac{1}{\sqrt{6}}$, que ocurre cada $\frac{1}{6}$ unidades de tiempo. Luego en $T = 2$ hay 12 "saltos", generando una posición final en el conjunto $\{\frac{-12}{\sqrt{6}}, \frac{-10}{\sqrt{6}}, \frac{-8}{\sqrt{6}}, \ldots, \frac{12}{\sqrt{6}}\}$.

Para poder dar el paso a tiempo continuo, es necesario primero definir estos procesos discretos en tiempo continuo; para $T \in (\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ se define $B^{(n)}(T)$ mediante interpolación lineal entre el valor del proceso en los extremos del intervalo. Es importante notar que el proceso definido así no es adaptado: el valor de $B^{(n)}(T)$ solo se conoce con la información disponible en $t = \frac{k+1}{n}$. La Figura 21 muestra varios caminos posibles para este proceso, usando $n = 100$. A diferencia de la Figura 19, esta sí representa caminos que son definidos en todo tiempo positivo.

Figura 21: Cinco realizaciones de la Caminata Aleatoria en tiempo continuo, $B^{(n)}$, hasta $T = 5$.

Ahora, el Teorema del Límite Central nos dice

$$\frac{S_k}{\sqrt{k}} \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$

Para evitar inconveniencias de discretizaciones del tiempo que no sean estrictamente crecientes, se toma $m = 2^n$, y así se puede fijar $T = k/2^n$ (punto que sería parte de siguientes discretizaciones del tiempo), para concluir

$$B^{(2^n)}(T) \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{N}(0,T).$$

Se puede entender que el límite $B = \lim B^{(n)}$ existe y está bien definido como proceso estocástico en $\mathbb{R}^+$;[26] sin embargo, un tratamiento más cuidadoso de la construcción del Movimiento Browniano exige varios elementos matemáticos que no se incluyen en este texto. El lector es referido a [7] y [8] para detalles técnicos de esta construcción. En el presente contexto, el Movimiento Browniano puede entenderse como el límite de las caminatas aleatorias discretas. Este resulta ser un proceso continuo, con algunas propiedades que pueden entenderse como heredadas del caso discreto. Sin embargo, el enfoque de una construcción rigurosa del Movimiento Browniano es demostrar la existencia de un proceso con estas mismas características; en particular, la construcción del Movimiento Browniano incluye la construcción del espacio probabilístico subyacente, $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$, el cual se toma como dado en lo que sigue.

Luego se aprovecha el entendimiento intuitivo, con base en las construcciones rigurosas mencionadas, para listar estas características que definen y describen el Movimiento Browniano.[27] No sobra notar que en rigor B es un proceso estocástico, y por lo tanto $B = B(t, \omega)$, para $t \in \mathbb{R}^+$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$.

1. $B(0) = 0$.
2. Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s)$.
3. Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
4. $B = B(\cdot, \omega)$ es una función continua en todo $t \geq 0$.
5. $B = B(\cdot, \omega)$ es una función no diferenciable para todo $t \geq 0$.
6. Para $t \geq s \geq 0$, $Cov(B(t), B(s)) = s$.
7. Se define $\mathcal{F}_t^B$ como la mínima σ-álgebra bajo la cual $B(t)$ es medible. Así, $\{\mathcal{F}_t^B : t \geq 0\}$ es la filtración generada por B. Entonces B es una martingala bajo esta filtración; es decir, para $t \geq s \geq 0$, $\mathbf{E}[B(t) \mid \mathcal{F}_s^B] = B(s)$.

6.2. Integral Estocástica

Se considera δ, un proceso estocástico adaptado[28] a $\{\mathcal{F}_t^B : t \geq 0\}$. El objetivo es definir la integral de δ con respecto a B, lo cual permitirá eventualmente definir procesos estocásticos continuos que representen, por ejemplo, la evolución del precio de una acción, que a su vez se prestará para analizar la evolución del valor de portafolios en tiempo continuo.

Como primera característica que supone un reto en esta tarea, está el hecho de que B está con-

[26] Como se sugirió antes, el mismo proceso B no es adaptado a la información que define la caminata aleatoria, pero en el límite se puede forzar esta característica, por ejemplo, definiendo los $B^{(n)}$ como constante en los intervalos $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$.

[27] Del siguiente listado, con frecuencia las primeros cuatro se establecen como las características que definen el movimiento Browniano. No se hará explícito, pero en general estas características se dan en un contexto de "casi siempre", significando que el conjunto en el que no se cumple la característica es de probabilidad cero.

[28] Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es adaptado a una secuencia creciente de σ-álgebras (o *filtración*) $\{\mathcal{F}_t^B : t \geq 0\}$, si para cada t, X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. Es decir, el proceso no se anticipa a la información que va creciendo en el sistema.

formado por caminos que no son diferenciables (en ningún punto del tiempo). Luego un intento natural de asignar $\int \delta dB = \int \delta B' dt$ no es factible, y el esfuerzo debe dirigirse a construir la integral para procesos simples, y luego extender a procesos generales. El segundo reto es precisamente que B está compuesto por sus caminos; luego la definición de la integral es simultánea para todos estos caminos, lo cual exige cuidado en el rigor matemático de construcción. Nuevamente, el presente texto muestra los elementos descriptivos generales, y tratamientos matemáticos con los detalles de rigor pueden encontrarse en [9].

Como motivación financiera, la integral estocástica representa el cálculo del PyG de un portafolio que en el tiempo t tiene $\delta(t)$ unidades de una acción cuyo precio es B. Con esta caracterización se puede proceder de forma natural, suponiendo inicialmente que δ es un *proceso elemental*; es decir, que es constante a trozos, donde la partición del tiempo es la misma para todos los caminos.

Sea, pues, $t_0(=0), t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n(=T)$ una partición del intervalo $[0,T]$, que se considera fija en la siguiente discusión; se supone que cada camino de δ es constante en cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Se define la integral de δ con respecto a B en $[0,T]$, $I_\delta(T)$, como el proceso dado por

$$I_\delta(T) = \int_0^T \delta(s) dB(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta(t_i)\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big). \tag{31}$$

Una inspección de esta definición permite corroborar que coincide con el cálculo del PyG de un portafolio compuesto por $\delta(t)$ unidades de una acción cuyo precio es B. La definición de la integral en el intervalo $[0,t]$, para $t \in [0,T)$ se define de forma natural, "deteniendo" el cálculo cuando se llega a t. Es decir, si $t \in [t_k, t_{k+1})$ ($k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$),

$$I_\delta(t) = \int_0^t \delta(s) dB(s) = \sum_{i=0}^{k-1} \delta(t_i)\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big) + \delta(t_k)\big(B(t) - B(t_k)\big).$$

Las siguientes son características de la integral para procesos elementales, cuyas demostraciones se dejan como ejercicio para el lector:

Lema 1. Si δ es un proceso elemental adaptado a $\mathcal{F}_t^B$,

1. $I_\delta(t)$ es un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t^B$.
2. $I_\delta(t)$ es lineal en δ.
3. $I_\delta(t)$ es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t^B$.
4. $\mathbf{E}[I_\delta(t)^2] = \mathbf{E}\big[\int_0^t \delta(s)^2 ds\big]$.

La extensión de la definición de la integral a procesos δ generales depende de poder aproximar estos procesos con procesos elementales. Esto se logra para un δ dado que sea adaptado a $\mathcal{F}_t^B$, si δ

no diverge en un sentido probabilístico. Es decir, se exige en general

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^T \delta(s)^2 ds\Big] < \infty, \quad T > 0. \tag{32}$$

Lema 2. Sea X un proceso estocástico adaptado a $\mathcal{F}_t^B$, que cumple (32). Entonces existe una secuencia de procesos elementales $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ adaptados a $\mathcal{F}_t^B$ tales que $X^{(n)} \to X$ en el siguiente sentido:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X^{(n)}(s) - X(s)|^2 ds = 0. \tag{33}$$

La demostración técnica completa puede encontrarse en [9], pero se puede desarrollar un argumento sencillo, que en efecto es la base de la demostración formal: en primer lugar, se considera una sucesión creciente de particiones del tiempo cada vez más fina, con $\Delta t \to 0$. Para la partición n, se construye un proceso elemental $X^{(n)}$ de tal forma que cada camino del proceso original X coincide con cada camino correspondiente de $X^{(n)}$ en los puntos inferiores de cada intervalo de tiempo. Es decir, si $[t_k, t_{k+1}]$ es un periodo de la partición, entonces $X^{(n)}(t_k) = X(t_k)$, y, por construcción, $X^{(n)}(t) = X^{(n)}(t_k)$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$. La figura 22 exhibe la situación planteada, que puede aplicarse a procesos con caminos continuos, o con finitas discontiuidades.[29] Parte del requerimiento de la construcción es demostrar que existe un único proceso que cumple (33), que permite una definición unívoca de la integral; este desarrollo exige trabajar con clases de equivalencia de procesos, agrupando aquéllos que efectivamente son indistinguibles desde un punto de vista apropiadamente definido. Las propiedades de la integral de procesos elementales del Lema 2 se heredan en el límite, lo cual de hecho es consecuencia de la técnica de aproximación mencionada. Como se sugirió anteriormente, en un contexto técnico el siguiente lema se aplica a las clases de convergencia de procesos (lo cual agrupa procesos indistinguibles, y permite aterrizar una única integral).

Lema 3. Si δ es un proceso estocástico adaptado a $\mathcal{F}_t^B$,

1. $I_\delta(t)$ es un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t^B$.
2. $I_\delta(t)$ es lineal en δ.
3. $I_\delta(t)$ es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t^B$.
4. $\mathbf{E}[I_\delta(t)^2] = \mathbf{E}\big[\int_0^t \delta(s)^2 ds\big]$.

No sobra notar que, como en el caso de integrales clásicas, la variable de integración es una "variable muda".

[29] El caso general se detalla en [9].

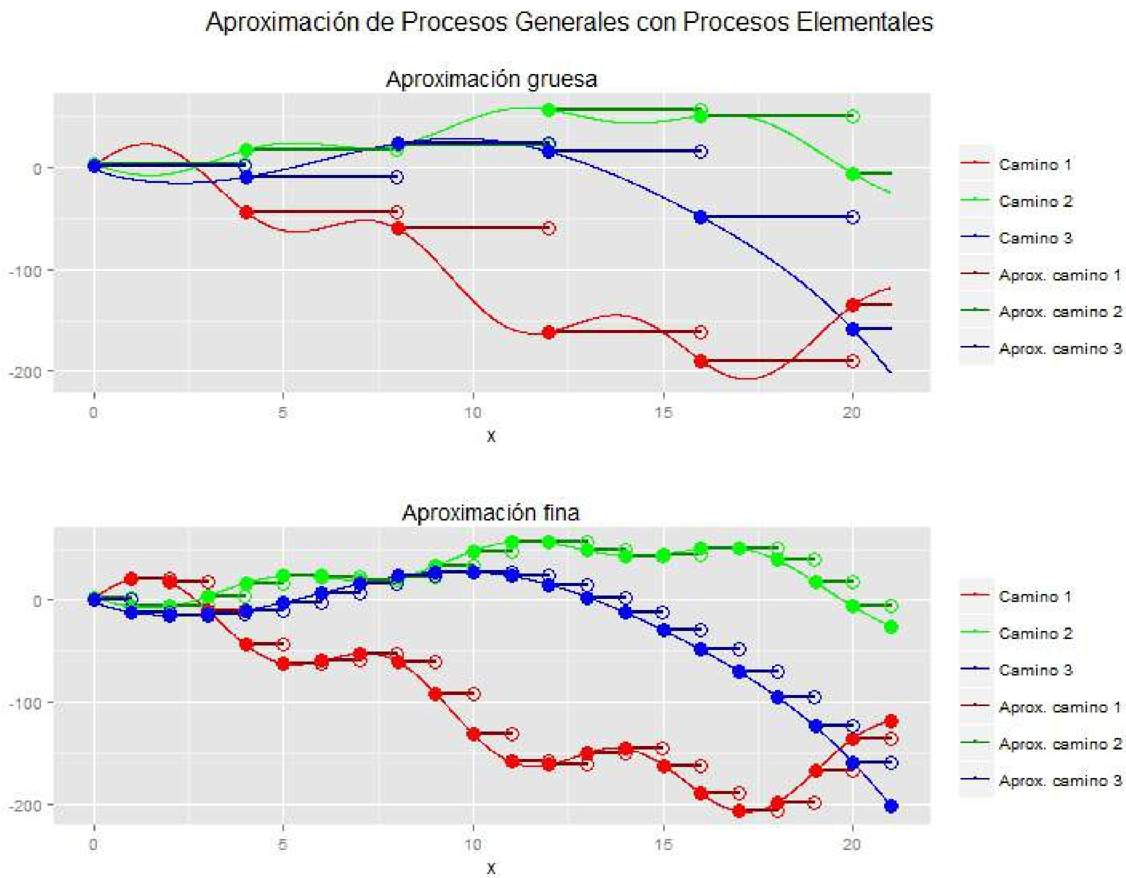

Figura 22: Aproximación de procesos generales con procesos elementales.

6.2.1. Variación cuadrática.

Considérese una función genérica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Una cuantificación de la variabilidad de la función en un intervalo dado $[a, b]$ se refleja con su Variación Absoluta:

$$VA_{[a,b]}(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

donde la suma se realiza sobre particiones de $[a, b]$ que crecen para poblar densamente el intervalo. El límite no siempre existe, pero para funciones suaves sí existe, y representa la "distancia" que recorre la función en el eje y. Más generalmente, se puede definir la variación de orden p:

$$VA^{(p)}_{[a,b]}(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^p.$$

Cada función tiene un orden p para el cual el límite es finito y positivo, lo cual está relacionado con la dimensión fractal de la función. Funciones con alta variabilidad exigirán $p > 1$ para garantizar convergencia.

Para el caso del Movimiento Browniano, podría considerarse una gama de "dimensionalidades", una por cada camino del proceso. Sin embargo, resulta que este número es $p = 2$ para todos los caminos del Movimiento Browniano.[30] Más sorprendemente, la cuantificación de esta *Variación Cuadrática* arroja el mismo resultado numérico para todos los caminos, uniformemente, como se exhibe a continuación.

Se considera B, un Movimiento Browniano, y la partición $0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n} \ldots, T$, para un $n \in \mathbb{N}$ dado. Para $k = 1, \ldots, n$ se define $\Delta t_k = \Delta t = \frac{T}{n}$; se define el salto Browniano para el intervalo k como $\Delta B_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$. De $\Delta B_k \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ se tiene $\mathbf{E}[\Delta B_k] = 0$, $\mathbf{E}[\Delta B_k^2] = \Delta t$ y $\mathbf{Var}[\Delta B_k^2] = 2\Delta t^2$.

Así, definiendo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta B_k^2,$$

se tiene $\mathbf{E}[S_n] = T$ y $\mathbf{Var}[S_n] = \frac{2T^2}{n}$. Cuando $n \to \infty$, la varianza de S_n converge a 0. Es decir, S_n converge a una constante, que resulta ser su valor esperado, T. Así, denotando por $\langle f \rangle_T$ o $\langle f \rangle(T)$ la variación cuadrática de f en el intervalo $[0, T]$, se concluye

$$\langle B \rangle(T) = T.$$

Es factible extender este concepto a la integral Browniana con el siguiente teorema, cuya demostración se deja al lector, con la sugerencia de arrancar por procesos elementales.

Teorema 5.

$$\langle I_\delta \rangle(T) = \int_0^T \delta^2(t)dt.$$

Ejemplo 12. *Cálculo de* $\int_{s=0}^{t} B(s)dB(s)$.

Se procede a calcular esta integral como el límite del cálculo correspondiente para procesos elementales que aproximen el Movimiento Browniano. Es decir, buscamos el límite (cuando $\Delta t \to 0$) de

$$\begin{aligned} Z_n = \sum_{k=1}^{n} B(t_{k-1})\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big) \quad &= \sum_{k=1}^{n} B(t_k)\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big) - \sum_{k=1}^{n}\big(B(t_k) - B(t_{k-1})\big)^2 \\ = -(Z_n - B(T)^2) - \sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2. \end{aligned}$$

[30]No sobra anotar que en general, afirmaciones que se hacen para todos los caminos de un Movimiento Browniano, en realidad cubren todos los caminos excepto un conjunto de probabilidad cero.

Manipulando esta igualdad,

$$Z_n = \frac{1}{2}B(T)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta B_k\right)^2.$$

Cuando $n \to \infty$, se concluye $\int_{s=0}^{t} B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B(T)^2 - \frac{1}{2}T$.

Es interesante notar que este resultado es similar al que se hubiera esperado de una integral de f con respecto a f, en el sentido clásico de Riemann, pero aparece un término causado por el hecho de que la variación cuadrática del Movimiento Browniano es diferente de cero. En efecto, se puede escribir

$$\int_{s=0}^{t} B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B(T)^2 - \frac{1}{2}\langle B\rangle_T.$$

6.3. Representación de Procesos

Para enriquecer el contexto de la fórmula que exhibe el Lema de Itô en la siguiente sección, se enuncia el Teorema de Representación de Martingalas, que sorprendentemente afirma que toda martingala que sea adaptada a la filtración generada por un Movimiento Browniano, puede representarse como una integral con respecto a ese Movimiento Browniano.

Teorema 6. Teorema de Representación de Martingalas

Sea X un proceso estocástico adaptado a $\{\mathcal{F}_t^B : t \geq 0\}$. Si X es una martingala entonces existe un proceso adaptado σ tal que para todo $t \geq 0$,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s)dB(s). \tag{34}$$

Este teorema (cuya demostración puede encontrarse en [7]) ofrece el converso al punto 3 del Lema 1, y permite inferir que cualquier martingala adaptada a la filtración Browniana es continua (es decir, todos sus caminos son continuos en el tiempo).

Por otro lado, y de forma más general, un gran conjunto de procesos (llamados semimartingalas continuas,[31] es decir con caminos continuos en el tiempo), que puede considerarse que incluye el conjunto de ejemplos prácticos de procesos continuos que se querrían modelar, puede descomponerse como una integral browniana, y una integral estilo Riemann sobre el periodo de tiempo analizado. Es decir en la gran mayoría de casos prácticos, para un proceso adaptado y continuo X existen

[31] Una semimartingala es un proceso que puede descomponerse en una martingala y un proceso de variación absoluta acotada (es decir, la diferencia de dos procesos no decrecientes).

procesos adaptados μ y σ tales que para todo $t \geq 0$,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s). \tag{35}$$

El poder de esta última expresión radica en reducir el problema del modelador de procesos continuos adaptados a determinar un *drift* μ y una *volatilidad* σ para calibrar su proceso.

Ahora, la literatura de cálculo estocástico ha seguido el estándar de reducir la expresión (35) a una sintaxis abreviada:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t),$$

o simplemente

$$dX = \mu dt + \sigma dB.$$

Es importante, sin embargo, notar que estas últimas expresiones no significan nada distinto a lo expresado en (35). En particular, los objetos "diferenciales" en estas expresiones no están definidos matemáticamente.

6.4. Lema de Itô

El lema de Itô exhibe una metodología que permite identificar una forma integral para procesos estocásticos definidos como una función de un proceso estocástico base. Este lema puede interpretarse como una extensión de la expansión de Taylor, que en procesos que involucran al Movimiento Browniano no pueden detenerse en el primer orden, sino deben seguir hasta el segundo orden debido a la variación cuadrática no nula; en adición, esta expansión explota una versión de la regla de la cadena para procesos estocásticos.

Se considera un proceso con representación diferencial

$$dX = \mu dt + \sigma dB, \tag{36}$$

y una función suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es factible definir el proceso $Y = f(X)$, y, más aún, es natural preguntarse si Y puede expresarse en términos de los procesos que definen a X; es decir, μ y σ. La respuesta es positiva, y define el enunciado del Lema de Itô.

Lema 4. Lema de Itô. Sea X un proceso estocástico dado por (36), f una función real doblemente diferenciable, y $Y = f(X)$. Entonces

$$Y(t) = f(X(0)) + \int_0^t \Big(\mu(s)f'(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s)^2 f''(X(s))\Big)ds + \int_0^t \sigma(s)f'(X(s))dB(s).$$

La versión diferencial del Lema de Itô es

$$dY = \big(\mu f'(X) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X)\big)dt + \sigma f'(X)dB.$$

Para convencerse intuitivamente del enunciado del Lema, es informativo comenzar por analizar la expresión $Y = f(X)$. Un intento directo por encontar dY llevaría a entretener la expresión

$$dY = f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)\text{“}dXdX\text{”}. \tag{37}$$

El problema con esta expresión es el elemento $dXdX$; recordemos que esta expresión diferencial solo es un abreviado de la expresión integral, y el elemento dX no es un objeto algebraico. El camino a seguir es indicado por el límite

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta B_k^2 \to T,$$

encontrado anteriormente (con las definiciones adecuadas de la partición de $[0, T]$). Detrás de esta convergencia, que se notó como $\langle B\rangle_t = t$, puede escribirse una expresión diferencial relevante:

$$d\langle B\rangle_t = dt.$$

Se podría intentar una definición de notaciones que acomodara lo que está diciendo esta expresión, y el límite mencionado:

$$\text{“}\int_0^T dB^2\text{”} = T, \qquad \text{o} \qquad \text{“}dBdB\text{”} = dt = d\langle B\rangle_t.$$

Ahora, la variación cuadrática de una integral riemanniana en el tiempo es 0, dada su naturaleza suave. Usando la expresión de variación cuadrática de integrales brownianas vista anteriormente (Teorema 5), se puede concluir que la variación cuadrática de X es

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds = \int_0^t \sigma^2(s)d\langle B\rangle_s.$$

Las expresiones sugieren replicar lo visto para el caso del Movimiento Browniano, y establecer

$$\text{“}dXdX\text{”} = d\langle X\rangle_t = \sigma^2 dt,$$

para reemplazar en (37) y encontrar

$$\begin{aligned} dY &= f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)\sigma^2 dt \\ &= \big(\mu f'(X) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X)\big)dt + \sigma f'(X)dB, \end{aligned}$$

que es la expresión diferencial del Lema de Itô.

Convenientemente, el Lema de Itô permite lidiar con los símbolos diferenciales dt, dB, dX como si efectivamente fueran instrumentos algebraicos: estableciendo[32]

$$\begin{aligned} dBdB &= dt \\ dtdB &= 0 \\ dtdt &= 0, \end{aligned}$$

puede escribirse

$$dXdX = \mu^2 dtdt + 2\mu\sigma dBdt + \sigma^2 dBdB = \sigma^2 dt,$$

como se tenía anteriormente. Al interior de estas expresiones puede evidenciarse la necesidad y suficiencia de detener la expansión estilo Taylor en el orden dos.

Ejemplo 13. *Cálculo de $\int_{s=0}^{t} B(s)dB(s)$, vía Lema de Itô.*

Se considera $X = B$, $f(x) = x^2$ y $Y = f(X) = B^2$. Usando $dX = dB$ ($\mu = 0, \sigma = 1$), el Lema de Itô dice

$$dY = \frac{1}{2}f''(X)dt + f'(X)dB = dt + 2BdB.$$

La versión integral de esta expresión es

$$B(t)^2 = t + 2\int_0^t B(s)dB(s),$$

que se reescribe como

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B(t)^2 - \frac{1}{2}t.$$

[32]La "identidad" $dtdt = 0$ es consecuencia de qua la variación cuadrática de la función $y(t) = t$ es cero. $dBdt = 0$ es consecuencia de que la *variación cruzada* de B y t es 0; es decir, usando definiciones apropiadas de la partición del intervalo $[0, T]$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (B(t_k) - B(t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (B(t_k) - B(t_{k-1}))\Delta t = \lim_{n\to\infty} \Delta t(B(T) - B(0)) = 0.$$

6.5. Extensiones del Lema de Itô

La primera extensión del Lema de Itô incorpora funciones que pueden depender de varios procesos, y del tiempo. Es decir, se consideran procesos $X_i, i = 1, \ldots, m$ con expresiones diferenciales

$$dX_i = \mu_i dt + \sigma_i dB,$$

y una función suave $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$. Se define el proceso $Y = f(t, X_1(t), \ldots, X_m(t))$, para el cual el Lema de Itô, en su versión multivariada, exhibe la expresión diferencial

$$\begin{aligned} dY = & \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_1, \ldots, X_m)dt + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_1, \ldots, X_m)dX_i \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_1, \ldots, X_m)dX_i dX_j \\ = & \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)dt + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dB, \end{aligned}$$

donde f y sus derivadas se aplican en el punto $(t, X_1(t), \ldots, X_m(t))$.

Ejemplo 14. *Cálculo de d(XY).*

Se consideran procesos dados X y Y, definidos en forma diferencial como

$$\begin{aligned} dX =& \mu_1 dt + \sigma_1 dB \\ dY =& \mu_2 dt + \sigma_2 dB. \end{aligned}$$

Se define $Z = XY$. Considerando la función $f(x, y) = xy$ en la expresión del Lema de Itô, se tiene

$$\begin{aligned} dZ =& XdY + YdX + dXdY \\ =& \big(\mu_2 X + \mu_1 Y + \sigma_1\sigma_2 XY\big)dt + \big(\sigma_2 X + \sigma_1 Y\big)dB. \end{aligned} \tag{38}$$

La segunda extensión mencionada es en realidad una extensión del Movimiento Browniano a varias dimensiones. Se define un Movimiento Browniano de dimensión m ($m \in \mathbb{N}$) como un vector de Movimientos Brownianos unidimensionales independientes $B_i, i = 1, \ldots, m$: $\mathbf{B}(t) = \big(B_1(t), \ldots, B_m(t)\big)$. Intuitivamente, un Movimiento Browniano multidimensional es la versión de la caminata aleatoria en tiempo continuo representado en varias dimensiones.

Así, un modelo continuo X cuyas fuentes de incertidumbre son dadas por un Movimiento

Browniano de dimensión m podría expresarse como

$$\begin{aligned} dX =& \mu dt + \sigma_1 dB_1 + \ldots + \sigma_m dB_m \\ =& \mu dt + \vec{\sigma} \cdot d\mathbf{B}, \end{aligned}$$

para ciertos procesos μ y $\vec{\sigma} = \big(\sigma_1, \ldots, \sigma_m\big)$.

En el contexto de la discusión del Lema de Itô, la independencia de los componentes garantiza que su variación cruzada es cero: fijando $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, se toma una partición uniforme (de tamaño n) de un intervalo dado $[0, T]$, y se define

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta B_i(t_k - t_{k-1}) \Delta B_j(t_k - t_{k-1}).$$

Luego se tiene $\mathbf{E}[Z_n] = 0$ y $\mathbf{Var}[Z_n] = \frac{T^2}{n}$. Cuando $n \to \infty$, la varianza de Z_n converge a 0. Es decir, Z_n converge a una constante, que resulta ser su valor esperado, 0. Así, denotando por $\langle f, g\rangle_T$ o $\langle f, g\rangle(T)$ la variación cruzada de f y g en el intervalo $[0, T]$, se concluye

$$\langle B_i, B_j\rangle(T) = 0.$$

Es decir, informalmente puede expresarse, para $i, j = 1, \ldots, m$,

$$dB_i dB_j = \begin{cases} dt, & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

6.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Una discusión formal de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) no es parte del alcance de estas notas. La búsqueda de caracterizaciones de ecuaciones cuya solución exista y sea única, en particular, es un problema de alta importancia en el estudio de procesos estocásticos, pero exige una plataforma matemática más amplia para una presentación precisa. Sin embargo, en esta sección se exhibe un breve vistazo al tema.

Una EDE es una ecuación cuya incógnita es un proceso estocástico con ciertas características; la ecuación define la difusión del proceso en términos del mismo proceso. En particular, se consideran procesos μ y σ que dependen de un proceso X, pero a su vez definen la versión integral de X. Es decir, se escribe

$$dX = \mu(X)dt + \sigma(X)dB, \quad X(0) = x_0, \tag{39}$$

y nos preguntamos si existe algún proceso X que cumpla esta ecuación. Esta pregunta es muy relevante para un modelador que quiere imprimir características a su proceso que dependen del mismo proceso. En el mundo financiero esto es bastante común. Por ejemplo, si se considera una cuenta bancaria que genera intereses de forma continua con una tasa de interés (que puede variar en el tiempo) $r(t)$, entonces el valor $P(t)$ de esta cuenta en el tiempo t debe cumplir

$$dP(t) = r(t)P(t)dt, \quad P(0) = P_0,$$

donde P_0 es el monto depositado inicialmente. En efecto, la expresión anterior puede interpretarse intuitivamente al intercambiar los diferenciales por cambios: una cuenta con un saldo de $P(t)$ genera intereses de $r(t)P(t)\Delta t$ durante el periodo de tiempo Δt. Es decir, $\Delta P(t) = r(t)P(t)\Delta t$. Esta expresión tiene una solución cerrada en el caso en que r es determinístico:

$$P(t) = P_0 e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Para el caso de acciones ocurre algo similar. Un modelador plausiblemente podría pedir que el *drift* sea un término proporcional al precio de la acción, como ocurre con la cuenta bancaria, pero adicionaría un término Browniano, en el que podría pedir que la volatilidad también fuera proporcional al precio de la acción. Es decir, podría establecer constantes μ y σ tales que el precio de la acción S cumpla

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB, \quad S(0) = S_0. \tag{40}$$

Este es el modelo de Black-Scholes-Merton para la evolución del precio de acciones. Ahora, resulta que la EDE (40) tiene una solución, que puede encontrarse directamente al definir el proceso $Y = \ln(S)$. Para que Y esté bien definido, se debe justificar que la misma expresión (40) garantiza $S(t) > 0$ si $S_0 > 0$, lo cual se deja al lector.

Aplicando el Lema de Itô a Y, se obtiene

$$\begin{aligned} dY =& \frac{1}{S}\mu S dt + \frac{1}{S}\sigma S dB - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2 dt \\ =& (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB, \end{aligned}$$

con condición inicial $Y(0) = \ln(S(0))$. Esta expresión puede integrarse analíticamente, obteniendo

$$Y(t) = Y(0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t),$$

luego

$$S(t) = S(0)\exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)\}. \tag{41}$$

Este proceso también recibe el nombre de **Movimiento Browniano Geométrico**, considerando la naturaleza exponencial del Movimiento Browniano en la expresión (41). Es pertinente observar que, dado que $B \sim \mathcal{N}(0,t)$,

$$\mathbf{E}[S(t)] = S_0 e^{\mu t}.$$

6.7. Teorema de Girsanov

El Movimiento Browniano es la extensión del concepto de caminata aleatoria en el mundo discreto al mundo en tiempo continuo. En el caso discreto, la intuición se ejemplifica con lanzamientos sucesivos de una moneda justa: si cae cara, el proceso "sube", y si cae sello, "baja". Si la moneda que gobierna el proceso no es justa, y, por ejemplo, tiene un sesgo hacia cara, entonces el proceso resultante tendrá un sesgo: su valor esperado tiende a ir hacia "arriba". Sin embargo, este sesgo puede corregirse de vuelta hacia cero asignando una mayor magnitud al paso hacia "abajo". Es decir, si la probabilidad de subir en (29) es $p > 50\,\%$, entonces $\mathbf{E}[X_i] = 2p - 1$. Sin embargo, si se cambia (29) apropiadamente, este valor esperado puede volver a ser cero. Por ejemplo, puede escribirse

$$X = \begin{cases} +2 - 2p, & \text{probabilidad } p \\ -2p, & \text{probabilidad } (1-p) \end{cases},$$

logrando $\mathbf{E}[X] = 0$. De forma análoga, se hubiera podido comenzar por una definición asimétrica de (29) en la que la magnitud del salto es distinta cuando sube y cuando baja. Se fija $\alpha \in (0,1)$ y se define

$$X = \begin{cases} +1 + \alpha, & \text{probabilidad } 50\,\% \\ -1 + \alpha, & \text{probabilidad } 50\,\% \end{cases},$$

cuya media es α. Ahora, es posible cambiar la probabilidad de tal forma que la media vuelva a ser cero. En efecto, la siguiente variable tiene media 0:

$$X = \begin{cases} +1 + \alpha, & \text{probabilidad } \frac{1-\alpha}{2} \\ -1 + \alpha, & \text{probabilidad } \frac{1+\alpha}{2} \end{cases}.$$

Este es el concepto planteado en el Teorema de Girsanov. Si se define un Movimiento Browniano, y se afecta por un *drift*, entonces existe una forma de cambiar las probabilidades iniciales de tal forma que, bajo estas nuevas probabilidades, el proceso nuevamente es un Movimiento Browniano.

Teorema 7. Teorema de Girsanov.

Sea B un Movimiento Browniano en un espacio de probabilidad dado $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$, y α un proceso adaptado a $\mathcal{F}_s^B$. Se define, para $t > 0$,

$$\tilde{B}(t) = B(t) + \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Entonces existe una probabilidad $\tilde{\mathbf{P}}$, tal que en el espacio $\left(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbf{P}}\right)$ el proceso $\tilde{B}$ es un Movimiento Browniano.

7. Valoración de Derivados en Tiempo Continuo

La tarea de valorar derivados en tiempo continuo busca la misma estrategia que dio resultado en el mundo binomial: establecer un portafolio que replique el pago de este derivado. Esta dirección aterriza en la *ecuación de Black-Scholes-Merton*, que es una ecuación diferencial parcial sobre el precio del derivado, usando como condición de frontera el pago final del derivado. Ahora, solucionar directamente esta ecuación es una tarea compleja, que desborda la intuición. De forma elegante, en casos generales (para derivados europeos) se puede llegar a la observación de que la solución de esa ecuación diferencial parcial puede expresarse como un valor esperado; más específicamente, puede calcularse como el valor esperado del valor presente del pago final del derivado, en donde el valor esperado se debe calcular sobre una probabilidad artificial, posiblemente distinta de la especificada por el analista para la evolución del subyacente. Esta nueva probabilidad, producto del cambio de proceso exhibido en el teorema de Girsanov, resulta ser la probabilidad de neutralidad al riesgo.

Así, los conceptos vistos hasta ahora se extienden al estudio de tiempo continuo; este capítulo pretende ilustrar las herramientas matemáticas usadas para poder cimentar esta extensión.

7.1. Dinámica de Portafolios

Como punto de partida, se considera un portafolio compuesto por N activos financieros básicos, con precios en el tiempo t iguales a $\mathbf{S}(t) = \big(S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t)\big)$ y posición en los activos de $\mathbf{h}(t) = \big(h_1(t), h_2(t), \ldots, h_N(t)\big)$. El valor de este portafolio en el tiempo t es $V(t) = \mathbf{h}(t) \cdot \mathbf{S}(t)$. Se supone que este portafolio es *autofinanciado*, que intuitivamente exige que el portafolio rebalancee sus posiciones sin necesidad de extraerle o inyectarle dinero adicional; es decir, se supone

$$\mathbf{S}d\mathbf{h} + d\mathbf{h}d\mathbf{S} = 0. \tag{42}$$

Para que la expresión anterior tenga sentido intuitivo, es valioso pensar que en un portafolio autofinanciado, que mantenga posiciones constantes en el intervalo $[t, t+\Delta t)$ y que realice un rebalanceo en el tiempo $t+\Delta t$, se debe tener

$$\mathbf{h}(t) \cdot \mathbf{S}(t+\Delta t) = \mathbf{h}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{S}(t+\Delta t),$$

que puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}(t) \cdot \big(\mathbf{h}(t+\Delta t) - \mathbf{h}(t)\big) + \big(\mathbf{h}(t+\Delta t) - \mathbf{h}(t)\big) \cdot \big(\mathbf{S}(t+\Delta t) - \mathbf{S}(t)\big) = 0, \qquad \text{o} \\
&\mathbf{S} \cdot \Delta\mathbf{h} + \Delta\mathbf{h} \cdot \Delta\mathbf{S} = 0,
\end{aligned}$$

que refleja intuitivamente el supuesto descrito en (42).

Usando el Lema de Itô y la suposición de autofinanciamiento, de $V = \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}$ se obtiene

$$\begin{aligned} dV &= \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot d\mathbf{h} + d\mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \tag{43}$$

expresión que refleja la definición de la integral estocástica en el espíritu de contabilizar el PyG de una posición $\mathbf{h}(t)$ en el tiempo t en un activo con precio $\mathbf{S}(t)$ en el tiempo t (ver la expresión (31)).

7.2. Instrumentos de Mercado y Arbitraje

Se supone la existencia de un bono, una acción, y un derivado sobre esta acción. En general se puede pensar que la acción representa cualquier activo básico. El objetivo final es encontrar el precio del derivado que evita la existencia de arbitraje en el mercado. Para esto, es necesario describir la dinámica de la evolución de los precios del bono y la acción.

Acción. El precio $S(t)$ de la acción cumple

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dB(t), \quad S(0) = S_0,$$

donde B es un Movimiento Browniano y μ y σ son procesos estocásticos adaptados a B (o más precisamente a la filtración generada por B). Estos procesos pueden ser generales, y representan el *drift*, o rentabilidad promedio de la acción, y la volatilidad del retorno de la ación, respectivamente. $S(t) > 0$ para (casi) todo t.

Bono. El precio $P(t)$ del bono cumple (ver sección 6.6)

$$dP(t) = r(t)P(t)dt, \quad P(0) = P_0,$$

donde $P_0 > 0$ es su precio inicial, y $r(t)$ es la tasa de interés libre de riesgo instantánea, que en principio puede ser un proceso estocástico general adaptado a B. $P(t) > 0$ para (casi) todo t.

Derivado sobre la Acción. Se supone la existencia de un derivado sobre la acción; este derivado se supone europeo, y su precio se denomina por π. La naturaleza markoviana de S sugiere que π solo debe depender del tiempo t y del precio de la acción $S(t)$.[33] Sin embargo, esto se toma como una suposición en el esquema presente: $\pi(t) = F(t, S(t))$ para una función suave F. El pago final del derivado es una función del precio final de la acción. Si T es la expiración del derivado, se denomina este pago final como $\Phi(S(T))$. Así, $\pi(T) = F(T, S(T)) = \Phi(S(T))$.

Por simplicidad notacional, en adelante se denotan las derivadas parciales usando un subíndice con la variable en la derivada. En adición, cuando no haya confusión del contexto, se evitará escribir la dependencia de las variables. Así, por ejemplo, para denotar la derivada parcial de F con respecto a la segunda entrada en la función, se escribirá

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, S(t)) = F_x.$$

Del Lema de Itô se obtiene

$$d\pi = \Big(F_t + \mu S F_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{xx}\Big)dt + \sigma S F_x dB(t), \quad \pi(T) = \Phi(S(T)). \tag{44}$$

El modelo de Black-Scholes-Merton consiste en este conjunto de instrumentos, tomando μ, r, σ constantes, con lo cual los precios del bono y la acción cumplen

$$\begin{aligned} P(t) =& P(0)\mathrm{e}^{rt} \\ S(t) =& S(0)\mathrm{e}^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}. \end{aligned}$$

Arbitraje Se mantiene la definición de arbitraje como un portafolio autofinanciado cuyo valor $V(t)$ cumple

- $V(0) = 0$
- $\forall\, t \geq 0 \quad V(t) \geq 0$
- $\exists\, t > 0 \quad \mathbb{P}[V(t) > 0] > 0$.

En la discusión presente se entiende por portafolio un conjunto de posiciones en los instrumentos del mercado.

Teorema 8. Considérese un portafolio cuyo valor en el tiempo t, $V(t)$, satisface la expresión

$$dV = \alpha dt \tag{45}$$

[33] Esta naturaleza markoviana realmente sugiere que la información necesaria está incorporada en el precio actual de S, y no se necesita información sobre la evolución (o camino) de S.

para algún proceso adaptado α. Si $rV \neq \alpha$ entonces existe una oportunidad de arbitraje.[34]

Demostración. Se define el proceso $\beta(t) = \text{sgn}\big(r(t)V(t) - \alpha(t)\big)$. Se construye un portafolio con valor inicial $W(0) = 0$, cuya posición en el bono en el tiempo t es $\frac{W(t)+\beta(t)V(t)}{P(t)}$ y en el portafolio original (o más precisamente en los instrumentos que componen el portafolio del enunciado del teorema) es $-\beta(t)$. Por construcción, este portafolio es autofinanciado (la inversión en el bono recoge el exceso de dinero), y por (43) se tiene

$$dW = \frac{W + \beta V}{P} dP - \beta dV = rW dt + \beta(rV - \alpha)dt = (rW + |rV - \alpha|)dt.$$

W refleja un proceso que comienza en 0, tiene un drift no negativo, y es positivo con probabilidad positiva en un conjunto de tiempo con medida positiva. Luego este portafolio demuestra la existencia de un arbitraje en el sistema. □

7.3. Valoración

El esquema de valoración es análogo al desarrollado en el caso discreto. En esa situación, se replicaban los pagos de los derivados usando la acción y el bono, obteniendo así el valor de no arbitraje del derivado. En este escenario se sigue con una metodología similar, pero en esencia se replica el bono con el derivado y la acción.

Se construye un portafolio compuesto por una unidad del derivado, y una posición corta en $F_x(t, S(t))$ unidades de la acción. Para garantizar autofinanciación, si hay exceso de dinero al establecer las posiciones en el derivado y la acción, éste se invierte en el bono; si por el contrario hace falta dinero para lograr esas posiciones, se toma una posición corta en el bono (en efecto, se pide prestado el dinero para financiar la posición). Así, la posición en el bono es $V(t) - F(t, S(t)) + F_x(t, S(t))S(t)$,[35] donde V denota el valor del portafolio. De (43) y (44), se puede escribir

$$\begin{aligned} dV &= d\pi - F_x dS + \frac{V - F + F_x S}{P} dP \\ &= (F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{xx} + rV - rF + rF_x S)dt. \end{aligned}$$

Del Teorema 8, suponiendo que no se admite arbitraje en el mercado, se deduce

$$F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{xx} + rV - rF + rF_x S = rV.$$

[34] Es decir, si $\big\{t \geq 0 : \mathbf{P}[r(t)V(t) \neq \alpha(t)] > 0\big\}$ es un conjunto de medida positiva.

[35] Es decir, se compran $\frac{V(t)-F(t,S(t))+F_x(t,S(t))S(t)}{P(t)}$ unidades del bono.

Es decir, la función F debe cumplir (reemplazando $S(t)$ por x para denotar la variable de entrada en la función F)

$$F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx} + rxF_x - rF = 0, \quad F(T, y) = \Phi(y). \tag{46}$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes-Merton (diferente de la fórmula de Black-Scholes-Merton que se verá más adelante). Es una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico, cuya condición de frontera se define en el tiempo T. La solución de esta ecuación aplicada en $(t, x) = (0, S(0))$ representa el valor de no arbitraje del derivado. Es importante notar que el drift de la acción, μ, no aparece en esta expresión, lo cual es reminiscente del caso discreto, en el que el retorno esperado de la acción bajo la probabilidad física resultaba irrelevante.

Ahora, la solución de esta ecuación típicamente exige métodos numéricos, pero hay un camino que se puede tomar para expresar de una forma probabilística este valor. En efecto, si se define

$$d\tilde{B}(t) = dB(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} dt,$$

entonces, por el Teorema de Girsanov, existe una probabilidad $\tilde{\mathbf{P}}$, bajo la cual el proceso $\tilde{B}$ es un Movimiento Browniano. Usando este nuevo proceso se puede escribir (acudiendo a la ecuación de Black-Scholes-Merton)

$$\begin{aligned} dS(t) &= r(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{B}(t) \qquad (47) \\ d\pi &= \Big(F_t + rSF_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{xx}\Big)dt + \sigma SF_x d\tilde{B}(t) \\ &= rFdt + \sigma SF_x d\tilde{B}(t). \end{aligned}$$

Se define el proceso auxiliar ψ, igual al proceso π descontado por la tasa r:

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-rt}\pi(t),$$

que cumple (usando el Lema de Itô)

$$\begin{aligned} d\psi &= \mathrm{e}^{-rt}d\pi - r\mathrm{e}^{-rt}\pi dt \\ &= \mathrm{e}^{-rt}\sigma SF_x d\tilde{B}. \end{aligned}$$

Dado que ψ es una integral Browniana, es por lo tanto una martingala (Lema 3). En particular, el valor esperado de $\psi(T)$ es su valor inicial $\psi(0)$:

$$F(0, S(0)) = \psi(0) = \tilde{\mathbf{E}}[\psi(T)] = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}\Phi(S(T))]. \tag{48}$$

Es decir, se llega esencialmente al mismo resultado encontrado en el caso discreto: el valor inicial del derivado es igual al valor esperado del pago final del derivado, descontado a valor presente, donde el valor esperado se calcula con una probabilidad que no es la "física", sino una probabilidad equivalente que surge de un cambio de medida (mediante el Teorema de Girsanov). Esta probabilidad usada exclusivamente para valoración de derivados recibe el nombre de *probabilidad de neutralidad al riesgo* o *probabilidad equivalente de martingala*.

De la misma forma que en el caso discreto, bajo esta probabilidad se tiene (usando (47), y considerando que el proceso $Y(t) = \mathrm{e}^{-rt}S(t)$ es una martingala bajo $\tilde{\mathbf{P}}$)

$$\tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}S(T)] = \mathrm{e}^{-r\times 0}S(0) = S(0). \tag{49}$$

Es decir, bajo esta probabilidad, la acción crece, en promedio, a la misma tasa que el bono.

Ejemplo 15. Fórmula de Black-Scholes-Merton. Se toma como derivado una opción call europea (sobre la acción), con Strike K. En adición, se considera el modelo de BSM, en el cual se especifican constantes para los proceso r y σ.[36] En este caso, $\Phi(S(T)) = (S(T) - K)^+$. De (48), el precio inicial del derivado consistente con la ausencia de arbitraje en el mercado es

$$\begin{aligned}
C^E(S(0)) =& \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}(S(T) - K)^+] \\
=& \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}(S_0\mathrm{e}^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\tilde{B}(T)} - K)^+] \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}(S_0\mathrm{e}^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma x} - K)^+ \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx,
\end{aligned}$$

dado que $\tilde{B}(T)$ es un Movimiento Browniano bajo $\tilde{\mathbf{P}}$. El valor positivo se puede eliminar del integrando tomando en cuenta solo la región de x donde es positivo, ya que en el resto de la recta real este valor es 0. Una manipulación algebraica revela que este integrando es positivo si y solo si

$$x > \frac{\ln\frac{K}{S_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}.$$

Definiendo C_1 como este valor límite, se puede escribir

$$\begin{aligned}
C^E(S(0)) &= \int_{C_1}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}(S_0\mathrm{e}^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+x} - K)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx \\
&= \int_{C_1}^{\infty} S_0\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+x-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx - \int_{C_1}^{\infty} K\mathrm{e}^{-rT}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx.
\end{aligned}$$

[36] μ también se considera constante, aunque esto no es relevante ni necesario para el desarrollo de la fórmula.

Cada integral puede resolverse en términos de

$$\mathcal{N}(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

y, después de algunas manipulaciones y cambios de variables (que se dejan como ejercicio al lector), se llega a

$$C^E(S(0)) = S_0\mathcal{N}(d_+) - e^{-rT}K\mathcal{N}(d_-), \tag{50}$$

donde

$$\begin{aligned} d_+ =& \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_- =& \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

7.4. Volatilidad Implícita

El modelo de Black-Scholes-Merton plantea una constante, σ, que es la volatilidad de la difusión del subyacente analizado. En el caso particular de la fórmula de B-S-M, σ aparece en las cantidades d_+ y d_-. En otros modelos de valoración, la volatilidad del subyacente también aparece de forma relevante en el cálculo de precios de opciones. Esta volatilidad de valoración se conoce como la *volatilidad implícita* del subyacente, y desde el punto de vista del modelador, es el valor con el que se pretende predecir la volatilidad que tendrá el subyacente durante la vida de la opción.

Esta volatilidad es la cantidad que cotizan y operan los traders de opciones. Es decir, en general la variable de mercado que sigue un trader de opciones es esta volatilidad. Las apuestas de valor relativo y de desviaciones aparentes que tienden a tomar estos participantes del mercado se basan en la posible dinámica de esta volatilidad. De hecho, el mercado ha asumido con profundidad la fórmula de B-S-M, hasta tal punto que cuando dos traders negocian y acuerdan un nivel de volatilidad, se sobreentiende que esta volatilidad es el insumo a usar en la fórmula para valorar la opción que están transando. Los otros insumos de esta fórmula se suponen conocidos: este es el caso para el Strike y la expiración (aunque la medida y denominación del tiempo debe ser entendida igualmente); sin embargo, para el caso del precio del subyacente y de la tasa de interés, dos observadores pueden tener opiniones distintas del valor a usar, y es importante acordar estos valores para evitar confusión.

El concepto de volatilidad implícita es contrastable con el de *volatilidad realizada*, que mide la volatilidad del subyacente en algún periodo histórico. A pesar de que hay muchas formas de medir esta volatilidad (usando retornos logarítimcos o aritméticos, usando frecuencia diaria, semanal, o incluso mensual, usando distintos periodos de tiempo), los traders de derivados reciben esta información para comparar con las volatilidades implícitas que se observan en el mercado. La distinción de que la volatilidad realizada es una volatilidad del pasado y la implícita es del futuro permite un nivel de precaución al comparar las dos cantidades. Por ejemplo, cuando no existe un mercado observable de opciones, y por lo tanto no se puede observar la volatilidad implícita en el mercado, los analistas tienden a estudiar la volatilidad realizada como punto inicial de análisis para decidir niveles de cotización de opciones. Sin embargo, al entender que es la volatilidad futura la que se debe usar al valorar opciones, el analista puede proceder realizando ajustes apropiados.

En mercados de opciones desarrollados, en donde se pueden observar precios para distintos Strikes y expiraciones para un mismo subyacente, es natural pensar en la volatilidad implícita en función de estas dos cantidades. La gráfica correspondiente se conoce como la superficie de volatilidad implícita. Al graficar de forma marginal la dependencia observada con respecto al Strike, generalmente se observa una curva convexa, con punto mínimo cercano al valor actual del mercado.

La Figura 23 muestra la volatilidad implícita de opciones call y put a tres meses sobre el índice S&P 500 (o más precisamente sobre el ETF del índice), para distintos Strikes. Esta "sonrisa" (en realidad en esta gráfica no parece mucho a una sonrisa) responde a expectativas del mercado, las cuales se pueden ver acentuadas cuando se percibe una mayor probabilidad de crisis en el corto plazo: como se verá en el Capítulo 8, la volatilidad pierde relevancia cuando el mercado se aleja del Strike. Por lo tanto, volatilidades correspondientes a situaciones en las que el mercado se aleja del valor actual, y que por lo tanto pueden interpretarse como situaciones en las que el mercado va a ser más volátil (una caída del S&P 500), suelen emparejar Strikes out-of-the-money con volatilidades implícitas más altas: traders que venden estas posiciones cobran una prima por la posibilidad de estar cortos opciones en momentos en que el mercado tenderá a ser más volátil.

Es importante mencionar la aparente contradicción que se vive en el mercado cuando se trabaja con el modelo de B-S-M. Éste dice que la volatilidad del subyacente es una constante durante el periodo del derivado. Sin embargo, se observa que la volatilidad implícita de un subyacente varía según la opción analizada, en la medida en que varía el Strike o la expiración, como se acaba de exhibir. Asimismo, la volatilidad implícita de una opción tiende a cambiar en el tiempo, siendo una variable de mercado. Todos estos puntos se alejan de la suposición de que la volatilidad es constante. Esto no es una fuente de contradicción para el trader. De hecho, por un lado, éste puede manejar distintos modelos a nivel interno, y solo cuando se enfrenta al mercado, por estandarización de comunicación, debe exponer el modelo B-S-M. Por otro lado, la situación es similar a la calibración de modelos matemáticos con información disponible en un momento dado; en momentos posteriores, cuando llega nueva información, se recalibran estos modelos, cambiando los parámetros originales, sin que esto plantee un problema de implementación.

Ahora, es frecuente que el modelo interno usado en las mesas de opciones plain vanilla sea efectivamente B-S-M. En estos casos, diferencias fuertes entre la distribución supuesta por el modelo

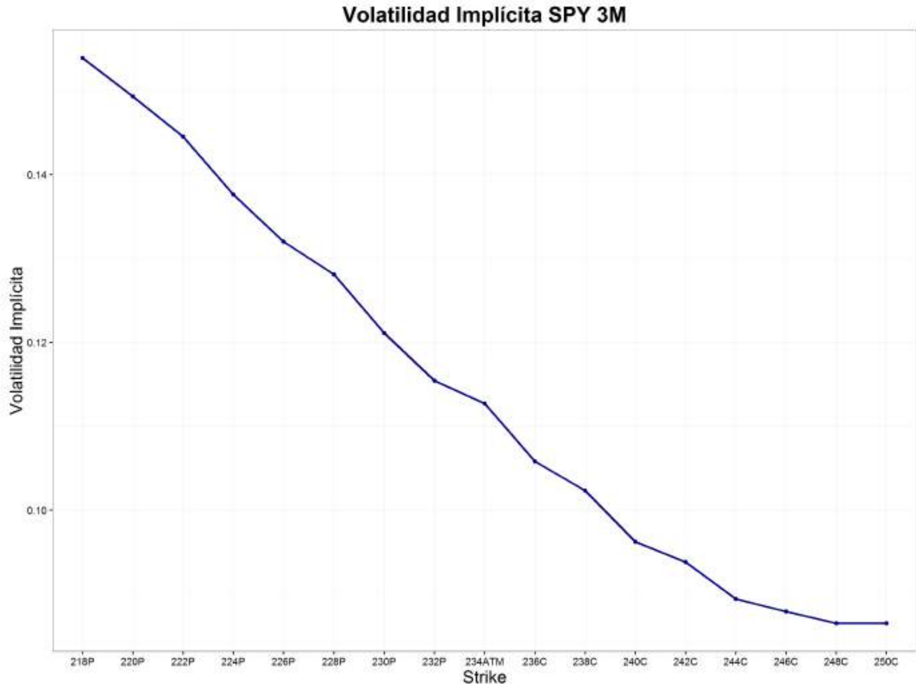

Figura 23: Volatilidad Implícita de Opciones a Tres Meses sobre el Índice S&P 500.

de valoración y la realización observada en el mercado generan problemas en la gestión de riesgo de estos instrumentos, normalmente evidenciados como PyG no explicado; es importante reconocer estas diferencias a tiempo, ya que día a día las desviaciones pueden ser pequeñas, pero pueden acumular grandes diferencias en el mediano plazo. Temas relacionados con este punto se analizarán en el Capítulo 8.

8. Análisis de Riesgo para la Gestión de Derivados

La gestión de riesgos de cualquier portafolio financiero comienza por cuantificar la exposición que tiene el valor del portafolio al movimiento de variables del mercado. La cuantificación de estas sensibilidades permite explicar el PyG según los movimientos observados, y en adición promueve una dinámica natural para poder asumir riesgos de una forma controlada (o por lo menos, monitoreada cuantitativamente).

Los instrumentos derivados suelen traer una alta complejidad matemática a la medición de riesgo de un portafolio; la razón de esto es la presencia de características de convexidad, y la importancia de variables tales como volatilidades y correlaciones implícitas. El análisis de riesgo genérico identifica inicialmente estos factores de riesgo y cuantifica la sensibilidad a las variables de mercado correspondientes. Para el caso particular de opciones plain vanilla, la fórmula de B-S-M permite identificar simplemente los insumos relevantes, y de hecho exhibe la relación matemática a partir de la cual se encuentran las derivadas parciales. Estas cantidades se conocen como *las griegas*, y son la piedra angular para la gestión de riesgo de portafolios amplios que pueden incluir un gran número de derivados, y una gran diversidad de instrumentos.

Este capítulo introduce las griegas para opciones plain vanilla, y discute los fundamentos para la gestión de riesgos de portafolios de derivados.

8.1. Griegas

Es natural motivar la discusión de la gestión del riesgo de derivados con un planteamiento hipotético, que parte del hecho de que un trader de derivados frecuentemente funciona como un creador de mercados en estos instrumentos. Se toma la situación de un trader de opciones en una acción dada, en la que un cliente le pide una cotización de venta de una opción call sobre la acción. El cliente puede haber preguntado a uno o dos competidores del trader por el mismo precio, y así se los deja saber, para mantener una competencia sana en el mercado. El trader bajo estudio cotiza el precio más bajo, ganando el negocio, con lo cual recibe una prima, y toma la posición corta en una opción call. Esta no es una posición que activamente estuviera buscando el trader, y (no es infrecuente) es posible que el mismo trader coincida con las razones que tiene el cliente para adquirir la opción; es decir, se encuentra en una posición posiblemente contraria a la que buscaría establecer proactivamente. Si el mercado se mueve en contra, es posible que la posición le genere pérdidas cuantiosas. ¿Qué puede hacer? Una posibilidad es salir a buscar esa misma posición al mercado. Es lo que plausiblemente buscarían hacer creadores de mercado de acciones y bonos. Sin embargo, por un lado es difícil encontrar esa misma posición en el mercado - de hecho, este trader se encuentra en esta posición porque ofreció el precio más competitivo -, y por otro lado el mercado de opciones es menos líquido y profundo que el del subyacente, lo cual hace más difícil la búsqueda.

Adicionalmente, las opciones disponibles difieren en Strike y expiración, lo cual puede dificultar la gestión exacta, aunque, como se verá más adelante, puede ser una fuente amplia de posibilidades para gestionar el riesgo de una forma aproximada.

La otra alternativa es buscar instrumentos de mercado que permitan una gestión activa y cercana del riesgo de la opción. En efecto, el activo subyacente es el instrumento natural: el valor del derivado está ligado al valor del subyacente.

En general, la gestión del riesgo de mercado de instrumentos financieros se basa en el análisis de dependencia del precio de estos instrumentos con respecto al movimiento de otros instrumentos que sean accesibles. En efecto, es natural buscar contrarrestar pérdidas generadas por una posición con ganancias en posiciones (posiblemente contrarias) en instrumentos similares. Esa es la esencia de la definición de las griegas, que definen el estudio de riesgo de los derivados: determinar la sensibilidad del cambio de valor en derivados ante cambios en los precios del subyacente, y de otras variables que afectan el precio del derivado.

Los derivados analizados hasta el momento permiten anticipar dependencia a las siguientes variables: (i) precio del subyacente; (ii) expiración (o tiempo hasta expiración); (iii) tasas de interés (o factores de descuento); (iv) modelo del subyacente. Este último (relevante solo para opciones, como se discutió anteriormente) suele tomarse como un Movimiento Browniano Geométrico, lo cual arroja la volatilidad como única variable relevante del modelo. Sin embargo, modelos más complicados (que incorporen volatilidad de la volatilidad, o correlación entre el subyacente y su volatilidad, por ejemplo) pueden sugerir variables adicionales de análisis de sensibilidad.

No sobra aclarar que el Strike en las opciones es una cantidad contractual que no cambia, por lo cual no requiere un análisis de sensibilidad.

En la discusión que sigue, se denota genéricamente por $V(t)$ el valor en el tiempo t de un derivado dado cuyo riesgo buscamos analizar. En general, este valor depende de las variables listadas anteriormente:

$$V(t) = V(S(t), T - t, r(t), \sigma(t)),$$

donde el precio del subyacente, el plazo a expiración, las tasas de interés y la volatilidad del subyacente (representando el modelo de dinámica del precio del subyacente) dependen del tiempo. Se intercambiará la notación explícita de dependencia de las variables, buscando la mayor claridad según el contexto utilizado.

8.2. Delta

Delta es el primer orden de sensibilidad del precio de un derivado con respecto al precio del subyacente:

$$\delta = \frac{\partial V(S)}{\partial S}. \tag{51}$$

Así, δ cuantifica el cambio en el precio del derivado por un cambio unitario en el precio del subyacente.

Ejemplo 16. Delta de un forward. De (7), el valor de un contrato forward sobre un subyacente sin dividendos es

$$V(t) = (F(t,T) - F(0,T)) \times P(t,T) = S(t) - F(0,T) \times P(t,T).$$

Para este derivado, la sensibilidad a cambios del precio del subyacente es

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S} = 1. \tag{52}$$

Delta permite cuantificar el número de unidades del subyacente que se poseen al tener el derivado, en un contexto "local". Alternativamente, el delta sugiere un camino natural para gestionar el riesgo de un derivado ante cambios en el precio del subyacente: tomar la posición contraria en delta en el subyacente. Así, si se tiene un derivado, y se venden δ acciones, el PyG del portafolio ante cambios pequeños del subyacente es:

$$\Delta\pi = \Delta V - \delta \times \Delta S \approx 0. \tag{53}$$

Observación 5. De (12), para una opción call, $\delta \in [0,1]$. Para una opción put, $\delta \in [-1,0]$.

El valor de δ para un derivado particular está atado al modelo de valoración usado. Más directamente, a partir de un motor de valoración, se puede estimar el delta mediante la técnica numérica natural de aproximación de la derivada. Así, si se define ϵ como un movimiento pequeño en el precio del subyacente, se puede aproximar δ mediante

$$\delta \approx \frac{V(S+\epsilon) - V(S-\epsilon)}{2\epsilon}. \tag{54}$$

En ocasiones, la valoración del derivado se genera de forma analítica, permitiendo así una fórmula para el δ, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17. Delta de una opción call usando la fórmula BSM. Del precio de una opción call, se puede encontrar el δ mediante el cálculo de la derivada con respecto a S_0. Ahora, ingenuamente inspeccionando la fórmula de BSM (50) se puede llegar a que esa derivada es igual a

$$\delta = \mathcal{N}(d_+), \tag{55}$$

y esto sería correcto, pero la respuesta es menos inmediata al observar que las cantidades d_+ y d_- contienen el término S_0 también. El hecho de que coincidencialmente se llegue a la fórmula de δ expuesta se deja como ejercicio al lector.

La figura 9 exhibía la forma cualitativa que debía cumplir el precio de una opción call, como función del precio del subyacente. La derivada de esta función es delta, cuya forma cualitativa se exhibe en la figura 24.

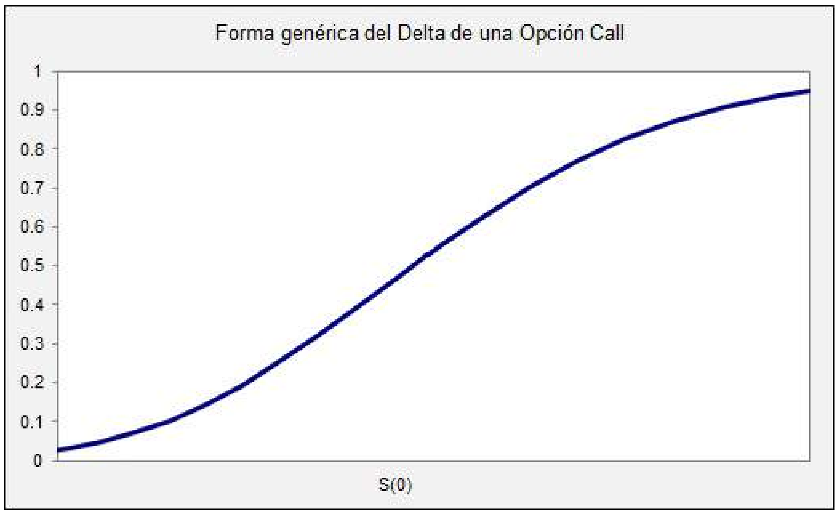

Figura 24: Gráfica genérica del delta de una opción call.

De la paridad put-call (8), el δ de una opción put europea (para un subyacente sin dividendos) se obtiene inmediatamente del δ de la opción call con igual Strike y expiración:

$$\delta_{put} = \frac{\partial P^E}{\partial S_0} = \frac{\partial(C^E - S_0 + KP(0,T))}{\partial S_0} = \delta_{call} - 1.$$

8.3. Gamma

Gamma es la sensibilidad de segundo orden del precio de un derivado con respecto al precio del subyacente:

$$\gamma = \frac{\partial^2 V(S)}{\partial S^2} = \frac{\partial \delta}{\partial S}. \tag{56}$$

Es decir, γ cuantifica el cambio en δ ante cambios en el precio del subyacente.

Ejemplo 18. Delta de un forward. Para un contrato forward sobre un subyacente sin dividendos,

$$\gamma = \frac{\partial \delta}{\partial S} = 0. \tag{57}$$

De forma similar a δ, el valor de γ para un derivado particular está atado al modelo de valoración usado. Más directamente, a partir de un motor de valoración, se puede estimar γ mediante la técnica numérica natural de aproximación de la segunda derivada. Así, si se define ϵ como un movimiento pequeño en el precio del subyacente, se puede aproximar γ mediante

$$\gamma \approx \frac{V(S+\epsilon) - 2V(S) + V(S-\epsilon)}{\epsilon^2}. \tag{58}$$

Asimismo, si existe una valoración analítica del derivado, en general se puede obtener la fórmula analítica para γ.

Ejemplo 19. Gamma de una opción call usando la fórmula BSM. De (55) se sigue

$$\gamma = \frac{e^{-d_+^2/2}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}.$$

La figura 24 exhibía la forma cualitativa del delta de una opción call, como función del precio del subyacente. La derivada de esta función es gamma, cuya forma cualitativa se exhibe en la figura 25.

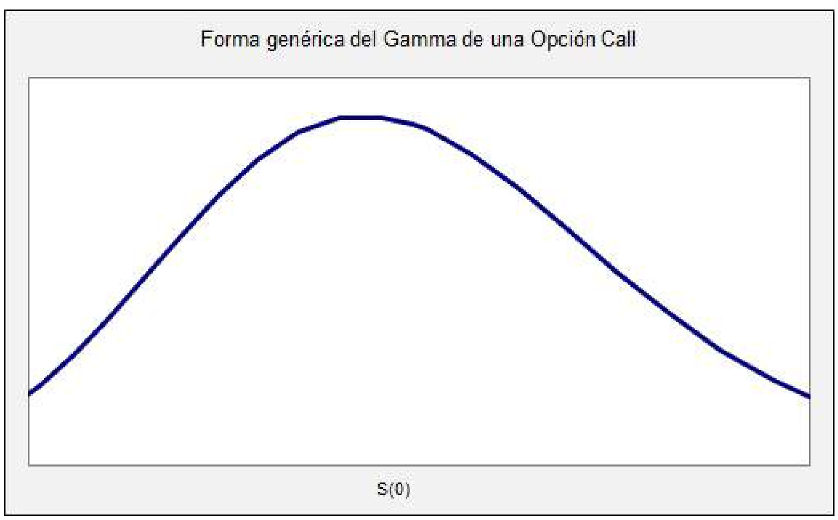

Figura 25: Gráfica genérica del gamma de una opción call.

De la paridad put-call (8), el γ de una opción put europea (para un subyacente sin dividendos) se obtiene inmediatamente del γ de la opción call con igual Strike y expiración:

$$\gamma_{put} = \frac{\partial \delta_{put}}{\partial S_0} = \frac{\partial(\delta_{call} - 1)}{\partial S_0} = \gamma_{call}.$$

Por otro lado, gamma permite precisar la estimación del PyG del portafolio ante cambios pequeños del subyacente, llegando hasta un segundo orden:

$$\Delta V \approx \delta \times \Delta S + \frac{1}{2}\gamma \times (\Delta S)^2.$$

Observación 6. Los precios de opciones call y put son convexos en el precio del subyacente, luego para las dos opciones, $\gamma \geq 0$.

Es difícil exagerar la importancia que gamma tiene para los traders de opciones. En general, cuando una mesa de derivados transa un nuevo derivado con un cliente, la mesa busca cubrir su riesgo, en primera medida cubriendo el delta de la operación. De (53), una posición contraria en δ acciones permite cubrir movimientos de primer orden de la posición en el derivado. En ausencia de una visión de mercado clara, una mesa de derivados busca mantener una posición neutral en las variables que pueden afectar la valoración de su portafolio; esto se conoce como una estrategia de *delta-cobertura*.

Ahora, esta estrategia es dinámica: el delta de una opción cambia con movimientos del subyacente. Luego, en la medida en que la posición en gamma no sea nula, la cantidad de acciones que se necesitan en el portafolio para contrarrestar pérdidas y ganancias en el precio de la opción cambia dinámicamente.

Una inspección detallada de la estrategia de delta-cobertura brinda luces del valor de gamma. Para cumplir con la estrategia, una posición *larga en gamma* implica que subidas en el precio del subyacente exigen ventas del mismo: esto ocurre porque al subir el subyacente, crece el delta (ya que gamma es positivo), exigiendo ventas adicionales en la acción para mantener la delta-cobertura. Análogamente, bajadas en el precio del subyacente exigen compras del subyacente.

Ejemplo 20. Un trader de opciones sobre la acción ABC - cuyo precio inicial es USD\$120 - tiene una posición larga en gamma de 100 acciones por dólar (es decir, si la acción sube USD\$1, su delta se incrementa en 100 acciones); para simplificar el ejemplo, suponemos que la posición en gamma no cambia (aunque en realidad gamma cambia con el tiempo y con movimientos del subyacente). El trader aplica una estrategia de delta-cobertura, para lo cual observa la acción periódicamente, estima su posición en delta, y opera acciones de forma acorde con su estrategia.

ABC es una acción volátil, que reacciona fuertemente ante el entorno político y financiero. Supongamos que el trader observa cada cinco minutos el precio de la acción. En un espacio de 15 minutos, los precios observados en los minutos 0, 5, 10 y 15 son, respectivamente: \$120, \$122, \$119 y \$120.

La delta-cobertura exige los siguientes pasos:

- Considerando que la posición inicial es neutral en delta, en el minuto 5 la estimación del nuevo delta es de 200 acciones (resultado de multiplicar gamma por el movimiento del subyacente).

Siguiendo su estrategia, vende 200 acciones (a \$122).

- En el minuto 10, estima su nueva posición en delta en -300 acciones (ya que la acción cae en \$3), por lo que sale al mercado a comprarlas a \$119.
- En el minuto 15, su nueva posición en delta es 100 acciones, que vende a \$120.

Al final de los 15 minutos, la acción volvió a su valor inicial. Aunque el precio de mercado del portafolio puede haber cambiado, es factible suponer que todo se valora igual que al principio. Sin embargo, el PyG del trader no es 0. En el camino compró 300 acciones a \$119, vendió 200 a \$122, y vendió las otras 100 a \$120, generando un PyG intradía de \$700.

El ejemplo produce un PyG que es real. El trader, sin embargo, no ha tomado más decisiones que seguir una estrategia de delta-cobertura. Este es el valor de gamma: una posición larga permite generar ganancias simplemente siguiendo el movimiento del mercado, con la tendencia de comprar cuando el mercado baja y de vender cuando sube. Más aún, mientras más volátil sea el mercado, más ganancias puede generar de la posición. Luego una posición larga en gamma es equivalente a una posición larga en volatilidad realizada del subyacente.

Esta posición larga en gamma, o en convexidad, no viene gratis. El mercado reconoce este beneficio, y exige una prima por entrar a dicha posición; este es el valor del tiempo que se paga en las primas de las opciones. De hecho, puede entenderse una posición larga en una opción como una apuesta a que la volatilidad realizada del subyacente durante la vida de la opción será superior a la volatilidad implícita usada para valorar la opción (en el contexto de la fórmula de B-S-M, por ejemplo).

De forma análoga, una posición corta en convexidad sufre ante la volatilidad del mercado. Mantener una posición neutral a delta exigirá comprar cuando el mercado sube y vender cuando baja. Aproximadamente, la prima generada al haber vendido la posición alcanzará a cubrir estas pérdidas si la volatilidad realizada no supera la implícita usada en la venta.

8.4. Theta

La contraparte de gamma es theta (θ). Una posición larga en gamma es beneficiosa en la medida en que el mercado se mueve, pero es costoso lograr esa posición. La prima exigida se va perdiendo en el tiempo, en la medida en que el subyacente presente baja volatilidad. Así, la volatilidad es amiga de posiciones largas en gamma, pero el tiempo es enemigo de esas posiciones.

Justamente, la griega θ cuantifica la pérdida de valor de opciones (y de derivados en general) por causa del paso del tiempo:

$$\theta = -\frac{\partial V}{\partial \tau}. \tag{59}$$

En la expresión anterior, τ denota el *plazo* de expiración del derivado. Es decir, es una cantidad que se reduce con certeza a medida que el tiempo pasa. El signo negativo busca cancelar esa dirección, midiendo como positivo el paso natural del tiempo.

Ejemplo 21. Theta de un forward. Usando notación de tasas compuestas continuamente, escribimos $P(t,T) = e^{-r(T-t)} = e^{-r\tau}$. De (7), el valor de un contrato forward sobre un subyacente sin dividendos es

$$V(t) = (F(t,T) - F(0,T)) \times P(t,T) = S(t) - F(0,T) \times P(t,T) = S(t) - F(0,T) \times e^{-r\tau}.$$

El plazo de expiración del derivado es $\tau = T - t$. De (59) se llega a

$$\theta = -\frac{\partial V}{\partial \tau} = -rF(0,T)P(t,T). \tag{60}$$

Aunque la manipulación de signos (y el tratamiento dual de "plazo" y "expiración") puede ser confusa, el punto importante es que las opciones pierden valor en la medida en que pasa el tiempo. La prima (el valor del tiempo) que representa el valor de las opciones *decae* con el tiempo.

De forma similar a las otras griegas, a partir de un motor de valoración, se puede estimar el theta mediante la técnica numérica natural de aproximación de la derivada. Así, si se define Δt como un movimiento pequeño en el tiempo, se puede aproximar θ mediante

$$\theta \approx \frac{V(t+\Delta t) - V(t-\Delta t)}{2\Delta t}. \tag{61}$$

Ejemplo 22. Theta de una opción call usando la fórmula BSM. Del precio de una opción call, se puede encontrar el θ mediante el cálculo de la derivada con respecto al tiempo. Este cálculo, que se deja como ejercicio para el lector, resulta en

$$\theta = -\frac{S_0 \mathcal{N}(d_+)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-), \tag{62}$$

De la paridad put-call (8), el θ de una opción put europea (para un subyacente sin dividendos) se obtiene inmediatamente del θ de la opción call con igual Strike y expiración:

$$\theta_{put} = -\frac{\partial P^E}{\partial \tau} = -\frac{\partial(C^E - S_0 + KP(0,T))}{\partial \tau} = \theta_{call} + rKP(0,T).$$

8.5. Vega

Vega (que denotaremos ν) es una griega (aunque no es una letra griega) de vital importancia para traders de opciones; mide la sensibilidad del precio de una opción con respecto a su volatilidad implícita:

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}. \tag{63}$$

Es importante notar que esta definición supone que la volatilidad es un parámetro usado en la valoración de la opción. Pero, como se ha mencionado de forma implícita, esto puede no ser el caso. El proceso que acompaña el Movimiento Browniano para definir la volatilidad de la acción puede ser general, y estar a su vez definido por un conjunto de parámetros, ninguno de los cuales necesariamente sea equiparable con una volatilidad. En general, por cada parámetro del modelo se puede definir una "griega". Sin embargo, en aras de una discusión en línea con los modelos estudiados hasta ahora, se supone que existe un parámetro llamado σ que representa la volatilidad del subyacente, y bajo esa suposición tiene sentido la definición de vega.

Ejemplo 23. Vega de un forward. Para un contrato forward sobre un subyacente sin dividendos, vega es

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0. \tag{64}$$

Si se define $\Delta\sigma$ como un movimiento pequeño en la volatilidad implícita, se puede aproximar ν mediante

$$\nu \approx \frac{V(\sigma + \Delta\sigma) - V(\sigma - \Delta\sigma)}{2\Delta\sigma}. \tag{65}$$

Ejemplo 24. Vega de una opción call usando la fórmula BSM. Del precio de una opción call, se puede encontrar ν mediante el cálculo de la derivada con respecto a σ. Este cálculo, que se deja como ejercicio para el lector, resulta en

$$\nu = S_0\sqrt{T}\mathcal{N}(d_+). \tag{66}$$

De la paridad put-call (8), ν de una opción put europea se obtiene inmediatamente de ν de la opción call con igual Strike y expiración:

$$\nu_{put} = \frac{\partial P^E}{\partial \sigma} = \frac{\partial (C^E - S_0 + KP(0,T))}{\partial \sigma} = \nu_{call}.$$

Es interesante discutir la relación entre gamma y vega. En una primera observación, las dos cantidades parecen relacionar la sensibilidad del precio de un derivado con la volatilidad del subyacente. En efecto, una posición larga gamma se beneficia de una alta volatilidad realizada, como se observó anteriormente. Una posición larga vega se beneficia de una subida en la volatilidad implícita. Son similares, pero fundamentalmente distintas.

Es posible tener una posición larga en gamma, y corta en vega, lo cual tiende a ocurrir cuando se está largo opciones de corto plazo, y corto opciones de largo plazo. Asimismo, es posible tener posiciones largas en gamma y en vega, pero al finalizar un día haber ganado plata por gamma y perdido por vega. Esto ocurriría si durante el día se observó una alta volatilidad en el precio del subyacente, pero la volatilidad implícita en el mercado cayó.

8.6. Rho

ρ mide la sensibilidad del precio de una opción con respecto a la tasa de interés libre de riesgo:

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{67}$$

En el lenguaje de instrumentos de tasas de interés, ρ podría relacionarse con la "duración" del derivado.

Ejemplo 25. Rho de un forward. Para un contrato forward sobre un subyacente sin dividendos

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = -F(0,T) \times \frac{\partial P(t,T)}{\partial r} = \tau F(0,T) \times P(0,T), \tag{68}$$

donde $\tau = T - t$.

Si se define Δr como un movimiento pequeño en la tasa libre de riesgo, se puede aproximar ρ mediante

$$\rho \approx \frac{V(r+\Delta r) - V(r-\Delta r)}{2\Delta r}. \tag{69}$$

Ejemplo 26. Rho de una opción call usando la fórmula BSM. Del precio de una opción call, se puede encontrar ρ mediante el cálculo de la derivada con respecto a r. Este cálculo, que se deja como ejercicio para el lector, resulta en

$$\rho = KTP(0,T)\mathcal{N}(d_-), \tag{70}$$

De la paridad put-call (8), el ρ de una opción put europea se obtiene inmediatamente del ρ de la opción call con igual Strike y expiración:

$$\rho_{put} = \frac{\partial P^E}{\partial r} = \frac{\partial(C^E - S_0 + KP(0,T))}{\partial r} = \rho_{call} - KTP(0,T) = -KTP(0,T)\mathcal{N}(-d_-).$$

8.7. Más Griegas

Para portafolios que trabajen con - a lo sumo - derivados *plain vanilla*, las griegas exhibidas hasta el momento cubren casi la totalidad del análisis requerido para gestionar el riesgo adecuadamente. Sin embargo, para estructuras exóticas, en ocasiones es necesario incluir otras derivadas. Algunas de éstas son:

$$\begin{aligned}
\text{vanna} &= \frac{\partial \delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} \\
\text{volga} &= \frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \\
\text{charm} &= -\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} \\
\text{speed} &= \frac{\partial \gamma}{\partial S} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}.
\end{aligned}$$

Este conjunto no es exhaustivo, y la necesidad de uso de mediciones adicionales surgen de la natrualeza de las estructuras y de la sofisticación del esquema de gestión de riesgo implementado.

8.8. Portafolios de Derivados y Explicación de PyG

Un portafolio de instrumentos financieros (posiblemente conteniendo derivados) puede analizarse matemáticamente como un instrumento financiero en sí. Es decir, es factible calcular griegas para el portafolio agregado. Considerando que las griegas son derivadas parciales, y por lo tanto de naturaleza lineal, la medición de las griegas de un portafolio resulta ser la suma de las griegas de los instrumentos que lo componen.

Sin embargo, el análisis para un portafolio puede complejizarse al considerar la posibilidad de incorporar diversos subyacentes: por ejemplo, el portafolio de posición propia de una comisionista puede incluir TES, acciones, posiciones en tasa de cambio, y derivados de estos subyacentes. Así, hablar de delta es factible en varias dimensiones: existirá una sensibilidad a movimientos de la tasa de cambio, otra a movimientos de cada acción subyacente, etc.

8.9. PyG

Consideremos un portafolio en línea con lo descrito. Para el gestor, y el responsable de hacerle seguimiento al riesgo del mismo, es vital contar con una función de valoración del portafolio. Teóricamente, esta función recibe como insumo el valor de factores de riesgo relevantes, y devuelve el valor monetario del portafolio, que normalmente busca cuantificar la cantidad de dinero que se recibiría (o pagaría) si el portafolio se liquidara en el mercado.

Para simplificar la discusión, se supone que el portafolio contiene instrumentos relacionados con un único subyacente. En aras de armar un argumento teórico, se puede suponer que el subyacente es una acción, y que los instrumentos financieros incluidos en el portafolio son la misma acción, forwards/futuros sobre la acción, y opciones (ya sea call, put, o exóticas) sobre la acción. Naturalmente, es factible incorporar instrumentos que reflejen el rendimiento libre de riesgo, tales como cuentas de ahorros en bancos de la más alta calidad crediticia (entendiendo que aún en este caso, la tasa no sería libre de riesgo).

Se denota el valor del portafolio como W:

$$W = W(t) = W(t, S, \vec{r}, \sigma),$$

donde S es el precio actual del subyacente, $\vec{r}$ es la tasa libre de riesgo entendida como una curva de rendimientos (permitiendo que la tasa varíe según el plazo), y σ es la superficie de volatilidad implícita (permitiendo que la volatilidad varíe según el plazo y el Strike). Se ignoran elementos que potencialmente podrían necesitarse con instrumentos exóticos y notas estructuradas, tales como correlaciones implícitas, volatilidad de la volatilidad, etc.

Tanto la mesa de trading como de riesgos tendrán especial interés en cuantificar la sensibilidad del portafolio a movimientos del mercado, estableciendo griegas para el seguimiento:

$$\begin{aligned}
\delta^P &= \frac{\partial W}{\partial S} \\
\gamma^P &= \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \\
\theta^P &= -\frac{\partial W}{\partial t} \\
\nu^P &= \frac{\partial W}{\partial \sigma} \\
\rho^P &= \frac{\partial W}{\partial \vec{r}}.
\end{aligned}$$

La interpretación de $\vec{r}$ o σ como vectores y matrices sugiere que la sensibilidad del portafolio a estos elementos serán a su vez vectores y matrices.

Central en la cuantificación de riesgo está la pregunta del posible tamaño de las pérdidas del portafolio a un horizonte dado. En la medida en que se incorpora una noción de incertidumbre al precio del subyacente, a las tasas de interés y a la superficie de volatilidad, será posible estudiar estas pérdidas como una variable aleatoria con una distribución a estimar.

Sin embargo, la línea de pensamiento también es útil hacia el pasado: una vez se observan cambios en estos parámetros de valoración, se puede descomponer el PyG del portafolio en los componentes sugeridos por las griegas. Para ver esto, podemos comenzar por definir el PyG en un periodo Δt como el cambio en el valor del portafolio:

$$\mathrm{PyG}_{\Delta t} = \Delta W = W(t+\Delta t, S+\Delta S, \vec{r}+\Delta\vec{r}, \sigma+\Delta\sigma) - W(t, S, \vec{r}, \sigma).$$

Esta expresión sugiere explorar una expansión de Taylor (suponiendo suavidad de la función de valoración):

$$\begin{aligned}\mathrm{PyG}_{\Delta t} =& \frac{\partial W}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial W}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial W}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial W}{\partial \vec{r}}\Delta\vec{r} \\ &+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\Delta t^2 + (\Delta\sigma)^T\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma\partial\sigma}\Delta\sigma + (\Delta\vec{r})^T\frac{\partial^2 W}{\partial\vec{r}\partial\vec{r}}\Delta\vec{r} \\ &+\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial S}\Delta S\Delta t + \frac{\partial^2 W}{\vec{r}\partial S}\Delta S\Delta\vec{r} + \ldots\Big) + \ldots.\end{aligned} \tag{71}$$

La expresión anterior inlcuiría en teoría los términos faltantes de segundo orden, los de tercer orden, etc. Sin embargo, para el horizonte común de seguimiento del PyG de este tipo de portafolios, que es un día, una aproximación de primer orden suele ser suficiente, excepto por el cambio de segundo orden del precio del subyacente, que normalmente se incluye.

Considerando estas simplificaciones, (71) puede reescribirse como sigue:

$$\mathrm{PyG}_{\Delta t} \approx \delta^P\Delta S + \theta^P\Delta t + \nu^P\Delta\sigma + \rho^P\Delta\vec{r} + \frac{1}{2}\gamma^P\Delta S^2. \tag{72}$$

Esta expresión permite partir el PyG en componentes que lo explican, facilitando la gestión de su riesgo y robusteciendo su monitoreo.

Observación 7. Un portafolio neutral a delta, vega y rho satisface

$$\mathrm{PyG}_{\Delta t} \approx \theta^P\Delta t + \frac{1}{2}\gamma^P\Delta S^2.$$

Luego para contrarrestar el efecto de decaimiento diario, el dueño de una opción necesita

$$|\Delta S| \gtrapprox \sqrt{-2\frac{\theta^P}{\gamma^P}\Delta t}.$$

Referencias

[1] Björk, T. (2004). ARBITRAGE THEORY IN CONTINUOUS TIME. OUP Oxford, 2nd Ed.

[2] Bodie, Z., Kane, A., and A. Marcus (2005). ESSENTIALS OF INVESTMENTS. McGraw Hill, 6th Ed.

[3] Capinski, M. and T. Zastawniak (2003). MATHEMATICS FOR FINANCE. Springer, 1st Ed.

[4] Christoffersen, P. (2003). ELEMENTS OF FINANCIAL RISK MANAGEMENT.

[5] Hull, J (2006). OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES. Prentice Hall, 6th Ed.

[6] McNeil, A. R. Frey., P. Embrechts (2005). QUANTITATIVE RISK MANAGEMENT. Princeton Series in Finance.

[7] Øksendal, B. (1985). STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS: AN INTRODUCTION WITH APPLICATIONS. Springer, 1st Ed.

[8] Shreve, S. (2004). STOCHASTIC CALCULUS FOR FINANCE I. Springer, 1st Ed.

[9] Shreve, S. (2004). STOCHASTIC CALCULUS FOR FINANCE II. Springer, 1st Ed.

Índice alfabético