Introducción a la Geometría Tropical y su aplicación al Diseño de Mecanismos

Julián Enrique Chitiva Bocanegra

Universidad de los Andes

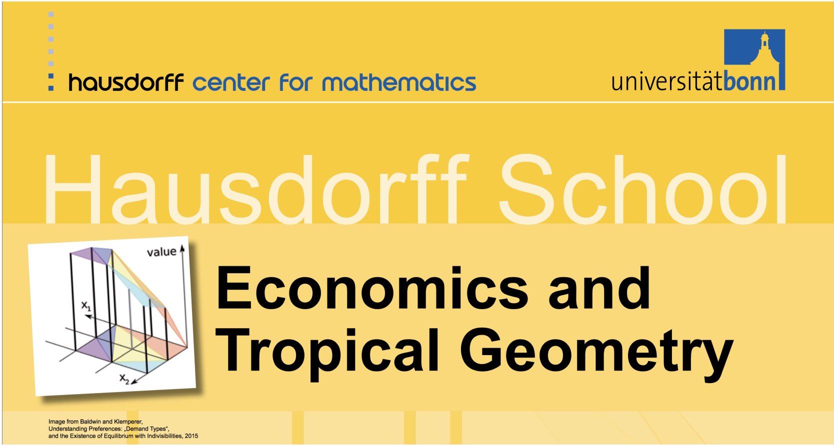
8 de febrero de 2018

Contenido

Motivación

Paul Klemperer. Fuente: paulklemperer.org

Motivación



Fuente: Hausdorff School

¿Qué es la Geometría Tropical?

¿Qué es la Geometría Tropical?

>Que es la Geometra Tropical?

Es el matrimonio entre la geometra algebraica y la combinatoria.

Objeto de estudio

En geometría tropical, el objeto de estudio es el semianillo tropical

Definición

Sea $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ el semianillo tropical con las siguientes operaciones:

$$
\begin{aligned}
x \oplus y &= \min\{x, y\} \\
x \odot y &= x + y
\end{aligned}
$$

Podemos definir el dual de este semianillo si consideramos

Definición

Sea $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ el semianillo tropical con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \max\{x, y\} \\ x \odot y &= x + y \end{aligned}$$

Para tener en cuenta

Estas operaciones cumplen las propiedades Conmutativa, Distributiva y ambas tienen un elemento neutro.

- Commutative: $a \quad b = b \quad a$, $a \quad b = b \quad a$
- Distributive: $a \quad (b \quad c) = (a \quad b) \quad (a \quad c)$
- Neutral element: $a \quad 1 \quad = a$, $a \quad 0 = a$

Para tener en cuenta

Estas operaciones cumplen las propiedades Conmutativa, Distributiva y ambas tienen un elemento neutro.

- Commutative: $a \quad b = b \quad a$, $a \quad b = b \quad a$
- Distributive: $a \quad (b \quad c) = (a \quad b) \quad (a \quad c)$
- Neutral element: $a \quad 1 \quad = a$, $a \quad 0 = a$

Hay que tener en cuenta que no existe la resta. Por ejemplo, no existe x que solucione $1 \quad x = 10$.

Ejemplos

$$1 \quad 10 = \min\{1; 10\} = 1$$

$$1 \quad 10 = 1 + 10 = 11$$

Tabla de suma tropical

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5	5	5
6	1	2	3	4	5	6	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8

Tabla de multiplicación tropical

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

Polinomios

En matemática tropical también podemos definir la noción de polinomio de la siguiente manera:
Sean $x_1; x_2; \ldots; x_n$ variables.

Definición

Un monomio es cualquier producto finito de estas variables.
Un polinomio es una combinación lineal finita de monomios.

Ejemplo

Considere el siguiente monomio en 3 variables.

$$m(x_1; x_2; x_3) = x_2 \quad x_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_1 = x_1^3 x_2^2 x_3$$

Podemos ver este monomio como una función de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$m(x_1; x_2; x_3) = 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3$$

Ejemplo

Considere $p(x)$, un polinomio cúbico en x.

$$p(x) = 6 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot x^2 \oplus x^3 = \min\{6, 3 + x, 2x + 1, 3x\}$$

Podemos ver este polinomio como una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

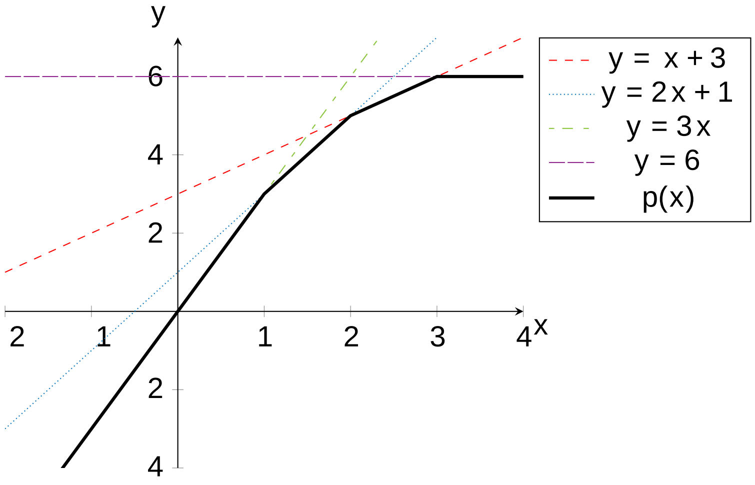
Ejemplo

Considere $p(x)$, un polinomio cúbico en x.

$$p(x) = 6 \oplus 3 \odot x \oplus 1 \odot x^2 \oplus x^3 = \min\{6; 3 + x; 2x + 1; 3x\}$$

Podemos ver este polinomio como una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
¿Cómo la graficamos?

La podemos gra car dibujando las siguientes funciones $y = \ x+3;\ y = 2x+1;\ y = 3x;\ y = 6$. Luego la gra ca de $p(x)$ es la envolvente inferior (mn) de estas.



$$p(x) = 6 \quad 3 \quad x \quad 1 \quad x^2 \quad x^3 = (\ x \quad 1) \quad (x \quad 2) \quad (x \quad 3)$$

Propiedades

Estas funciones tienen tres propiedades importantes

- Continuas. Mínimo de funciones continuas
- Lineales a trozos. Mínimo de un número finito de funciones lineales
- Cóncavas. $p(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{1}{2}(p(x) + p(y)) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Curvas

Definición

Sea $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función polinomial tropical. La hipersuperficie tropical $H(p)$ es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ en los cuales el mínimo p es alcanzado al menos dos veces.

Equivalentemente, $x \in H(p)$ si y solo si p no es lineal en x.

Ejemplo

Sea
$$p(x,y) = 8 \odot x \oplus 12 \odot y \oplus 13 = \min\{8 + x, 12 + y, 13\}$$

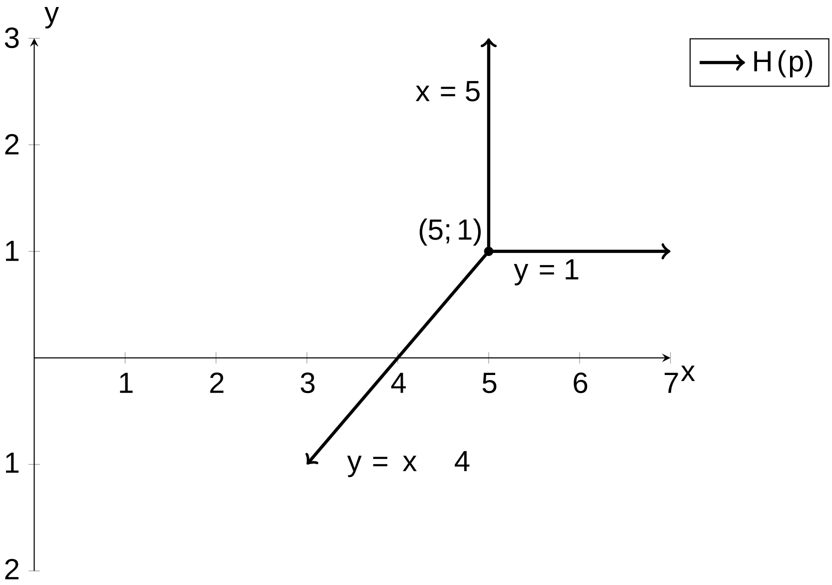
La curva $H(p)$ consiste de todos los puntos (x,y) en los que la función no es lineal, o el mínimo es alcanzado 2 veces.

Calculos

$$
\begin{aligned}
8 + x &= 13 \\
x &= 13 \quad 8 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 + y &= 13 \\
y &= 13 \quad 12 \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 + y &= 8 + x \\
y &= x \quad 4
\end{aligned}
$$



$$p(x;y) = 8 \quad x \quad 12 \quad y \quad 13$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 8 \quad x^2 \quad\quad 1 \quad xy \quad 15 \quad y^2 \quad 3 \quad x \quad 5 \quad y \quad 7 \\
&= \min\{8 + 2x; \; 1 + x + y; 15 + 2y; 3 + x; 5 + y; 7\}
\end{aligned}
$$

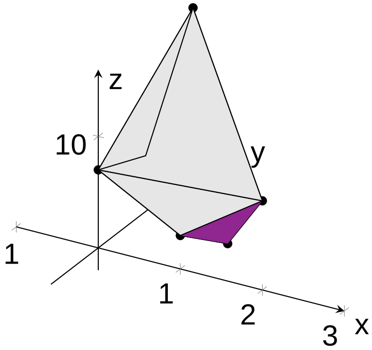
Ejemplo

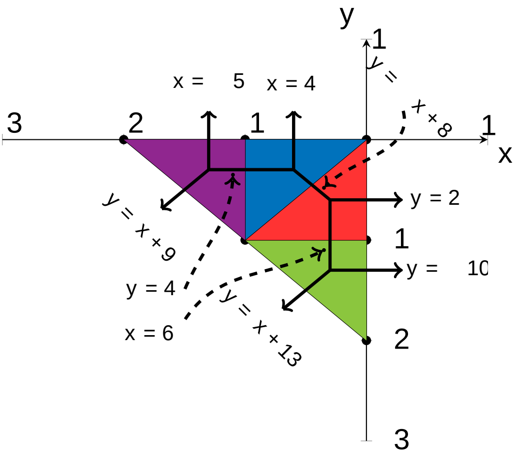
$$
\begin{aligned}
p(x) &= 8 \quad x^2 \quad\quad 1 \quad xy \quad 15 \quad y^2 \quad 3 \quad x \quad 5 \quad y \quad 7 \\
&= \min\{8+2x;\ 1+x+y;\ 15+2y;\ 3+x;\ 5+y;\ 7\}
\end{aligned}
$$

¿Cómo dibujamos estas curvas?

Metodo general

- Para cada monomio $x^i \; y^j$ en p considere el punto $(i; j; \;) \in \mathbb{R}^3$.
- Despues de hacer esto para todos los monomios, calcule la envolvente convexa en $\mathbb{R}^3$ de dichos puntos.
- Proyecte la envolvente inferior usando el mapa $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que enva $(i; j; \;)$ en $(i; j)$. La imagen de esta proyeccion es un politopo plano con una subdivision particular.
- Re eje este politopo con respecto a la linea $y = \; x$
- La curva tropical de min-suma $H(p)$ es el grafo dual a esta subdivision.





$$p(x) = 8 \quad x^2 \qquad 1 \quad xy \quad 15 \quad y^2 \quad 3 \quad x \quad 5 \quad y \quad 7$$

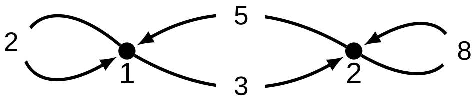
Algebra Lineal

De nición

Sea A una matriz n n con entradas en el semianillo tropical. es un valor propio si A x = x para algún x 2 R^n. Este x es el vector propio tropical asociado a . Representaremos una matriz tropical con el grafo dirigido

Ejemplo

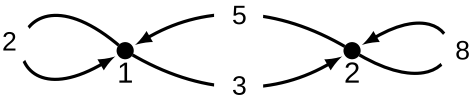
Sea $A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{matrix}$. El grafo dirigido $G(A)$ es



Teorema

Sea A una matriz tropical cuyo grafo $G(A)$ es fuertemente conexo. Luego A tiene solo un valor propio tropical (A) igual a la longitud mnima normalizada de los ciclos en $G(A)$.

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{matrix}$$



ciclo	longitud
f 1; 1g	2
f 2; 2g	8
f 1; 2; 1g	$\frac{3+5}{2}$

Ahora calculemos el espacio propio de A.

De na $B = A \quad (A)1$

Calcule$B^{+} = B \quad B^{2} \qquad B^{n}$

Ahora calculemos el espacio propio de A.

De na $B = A \quad (A)1$

Calcule$B^{+} = B \quad B^{2} \quad B^{n}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el espacio propio de A.

De na $B = A \quad (A)1$

Calcule $B^{+} = B \quad B^{2} \qquad B^{n}$

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{matrix} \qquad\qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} B^{+} &= B \quad B^{2} \\ &= \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} \end{aligned}$$

Ahora calculemos el espacio propio de A.

De na $B = A \quad (A)1$

Calcule $B^{+} = B \quad B^{2} \qquad B^{n}$

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{matrix} \qquad\qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} B^{+} &= B \quad B^{2} \\ &= \begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$A \quad b = \quad b$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} = 2 \quad \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$$

Convexidad tropical

Definición

El espacio cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbf{1}$ llamado *toro tropical proyectivo*, se obtiene de $\mathbb{R}^n$ al identificar vectores con sus múltiplos escalares tropicales. El espacio $\mathbb{TP}^{n-1}$ es la compactificación de $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbf{1}$.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{TP}^{n-1}$ la proyección canónica.

Cuando sea conveniente identificaremos TP^{n-1} con $\mathbb{R}^{n-1}$ mediante el homeomorfismo

$$
\begin{aligned}
: TP^{n-1} &\to \mathbb{R}^{n-1} \\
(x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)
\end{aligned}
$$

Espacios tropicales convexos

Definición

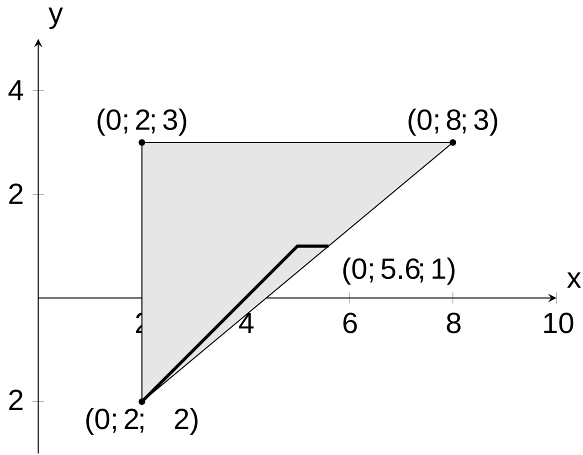
Un conjunto V es tropicalmente convexo si $\forall x, y \in V; \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$a \odot x \oplus b \odot y \in V$$

La envolvente convexa tropical de $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto tropical convexo más pequeño en $\mathbb{R}^n$ que contiene V.

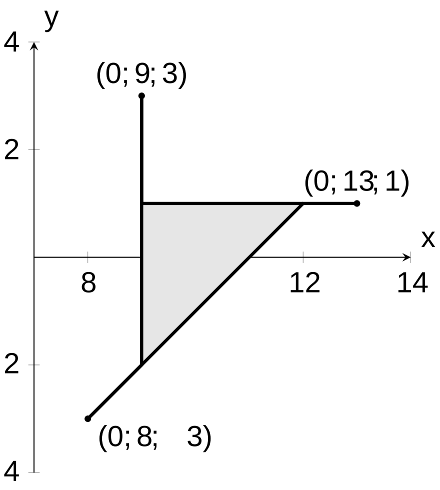
Ejemplo

Sea $V = \{(0;2;3);(0;8;3);(0;5.6;1)\}$



Ejemplo

SeaV = f (0; 9; 3); (0; 13; 1); (0; 8;   3)g



Diseño de Mecanismos

Es una rama de la teora de juegos, que considera el problema de asignacion abstrayendose de los detalles de una manera particular de asignarlos y centrandose en encontrar la mejor de ellas.

De nicion

Un mecanismo (g, p) consiste de

1. Una funcion de resultados $g : B \to$
2. Una funcion de pagos $p : B \to \mathbb{R}^n$

B: Conjunto de mensajes

: Conjunto de resultados

Principio de Revelación

Vamos a restringir nuestro análisis a mecanismos en los cuales el conjunto de mensajes es el mismo que las valuaciones X, estos se llaman mecanismos de revelación directa.

Proposicion

Dado un mecanismo y un equilibrio para ese mecanismo, existe un mecanismo de revelacion directa en el cual

1. Es un equilibrio para cada agente decir la verdad
2. Los resultados son los mismos que los dados por el equilibrio original

Compatibilidad de incentivos

Sean $x \in X$ las verdadera valuacion del agente. Sean $z \in X$ las valuaciones reportadas por los agentes.

Definición

Un mecanismo de revelación directa (g, p) es incentivo compatible (IC) si $\forall x$; $\forall z$ se cumple la siguiente desigualdad.

$$u(x) \geq u(z)$$

Geometría tropical aplicada al diseño de mecanismos

Algunas consideraciones:

- El análisis del diseño de mecanismos es principalmente algebraico o analítico.

Geometra tropical aplicada al diseño de mecanismos

Algunas consideraciones:

- El análisis del diseño de mecanismos es principalmente algebraico o analtico.
- Al usar geometra tropical el estudio de mecanismos IC se convierte en una pregunta acerca de
  - espacios propios tropicales
  - con guraciones de los puntos en $\mathbb{TP}$.

Geometra tropical aplicada al diseño de mecanismos

Algunas consideraciones:

- El análisis del diseño de mecanismos es principalmente algebraico o analtico.
- Al usar geometra tropical el estudio de mecanismos IC se convierte en una pregunta acerca de
  - espacios propios tropicales
  - con guraciones de los puntos en TP.
- Nos centraremos en mecanismos de un solo agente.

Notación

- Sea $m \in \mathbb{N}$ el número de resultados posibles
- Sea $T \subseteq \mathbb{TP}^{m-1}$ un multiconjunto de tipos. La i-ésima coordenada de $t \in T$ mide la valuación del agente por el resultado i.
- Sea (g, p) un mecanismo, donde $g : T \to [m]$ y $p : T \to \mathbb{R}$

En esta nueva notación podemos redefinir la compatibilidad de incentivos

Definición

Un mecanismo (g, p) es IC si independientemente de (el tipo verdadero), el agente maximiza su utilidad diciendo la verdad. Es decir, $\forall\, s, t \in T$ se cumple:

$$
\begin{aligned}
u([g(t), p(t)], t) &\geq u([g(s), p(s)], t) \\
t_{g(t)} - p(t) &\geq t_{g(s)} - p(s)
\end{aligned}
$$

Una función de resultados $g : T \to [m]$ es IC si existe una función de pagos $p : T \to \mathbb{R}$ tal que (g, p) es IC.

De nición

Sea L^g la matriz de asignación de una función de resultados g, esta es una matriz $m \times m$ con entrada jk-ésima

$$L^g_{jk} = \inf_{t \in g^{-1}(j)} \{ t_j - t_k \}$$

De nición

Sea $g : T \to [m]$ una función IC de resultados, sea $\underline{E}(L^g)$ el conjunto de *pagos* IC de g.

Teorema

Una función de resultados g es IC si y solo si la matriz de asignación L^g tiene valor propio tropical 0.

Definición

Sea $\underline{\mathrm{coVec}}_T(p)$, el covector min-suma de $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$ con respecto a T el grafo bipartito con nodos en $[m] \sqcup T$ y arista $(i, t) \in [m] \times T$ si y solo si $p \in \underline{H}_i(-t)$

Definición

Considere un multiconjunto $T \subset \mathbb{TP}^{m-1}$ y h un grafo bipartito en $[m] \sqcup T$. Decimos que h es un grafo de resultados si define una función de resultados g, i.e. (i, t) es una arista del grafo h si y solo si $g(t) = i$

Ejemplo

El ministro de trabajo de un país quiere implementar una de 3 políticas. Se sabe que el espacio de tipos en la economía es $T = \{t_1; t_2; t_3\} = \{(1; 3; 9); (2; 7; 6); (3; 11; 9)\}$. Bajo esta notación, las valoraciones de los agentes frente a las políticas son

tipo	política 1	2	3
t_1	1	3	9
t_2	2	7	6
t_3	3	11	9

Supongamos que solo hay un ciudadano en esta economía. El ministro quiere diseñar un mecanismo $(C; p)$ tal que se recaude la mayor cantidad de impuestos de la política elegida.

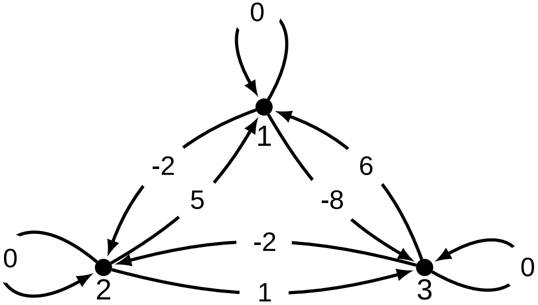
Una posible forma de elección es que si el agente reporta ser de tipo t_i se escoja la política i, $f(t_i) = i$.

Una posible forma de elección es que si el agente reporta ser de tipo t_i se escoja la política i, $f(t_i) = i$. ¿sería IC?

La matriz de asignación es

$$L^f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos el grafo dirigido $G(L^f)$ y algunos ciclos con su longitud



ciclo	longitud
$\{1;1\}$	0
$\{2;2\}$	0
$\{3;3\}$	0
$\{1;2;1\}$	1.5
$\{1;3;1\}$	-1
$\{2;3;2\}$	-0.5
$\{1;2;3;1\}$	1.67
$\{1;3;2;1\}$	-1.67
$\{1;2;3;2;1\}$	0.5
$\{1;3;2;3;1\}$	0.75
$\{2;1;3;1;2\}$	0.33

>Quién tiene incentivos a mentir?

tipo	poltica 1	poltica 2	poltica 3
t_1	1	3	9
t_2	2	7	6
t_3	3	11	9

>Como encontrar los mecanismos incentivo compatibles?

¿Cómo encontrar los mecanismos incentivo compatibles?

Consideremos el arreglo de hiperplanos $\underline{H}(T)$

¿Cómo encontrar los mecanismos incentivo compatibles?

- Consideremos el arreglo de hiperplanos $\underline{H}(T)$
- Consideremos los covectores de los puntos de acuerdo a su posición en $\mathbb{TP}^2$

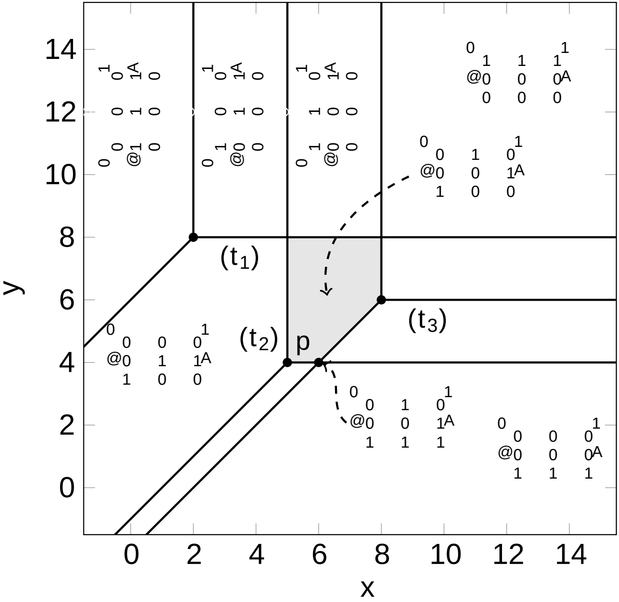
¿Cómo encontrar los mecanismos incentivo compatibles?

- Consideremos el arreglo de hiperplanos $\underline{H}(T)$
- Consideremos los covectores de los puntos de acuerdo a su posición en $\mathbb{TP}^2$
- Analicemos la condición IC para los covectores que nos definan grafos de resultados

¿Cómo encontrar los mecanismos incentivo compatibles?

- Consideremos el arreglo de hiperplanos $H(\underline{m}, T)$
- Consideremos los covectores de los puntos de acuerdo a su posición en TP^2
- Analicemos la condición IC para los covectores que nos definan grafos de resultados

Arreglo de hiperplanos

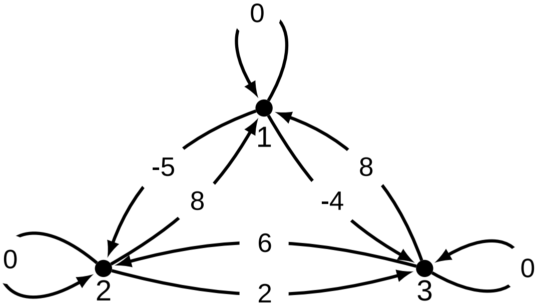


Verificaremos la condicion IC para

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = t_2 \\ 2 & \text{if } t = t_3 \\ 3 & \text{if } t = t_1 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de asignación L^g y el grafo dirigido $G(L^g)$.

$$L^g = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



ciclo	longitud
f 1; 1g	0
f 2; 2g	0
f 3; 3g	0
f 1; 2; 1g	1.5
f 1; 3; 1g	2
f 2; 3; 2g	4
f 1; 2; 3; 1g	1.67
f 1; 3; 2; 1g	3.33
f 1; 2; 3; 2; 1g	2.75
f 1; 3; 2; 3; 1g	3
f 2; 1; 3; 1; 2g	7

>Qué nos falta?

¿Qué nos falta?

Los pagos IC.

Retomemos $L^g = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos L^{g+} de esta matriz.

¿Qué nos falta?

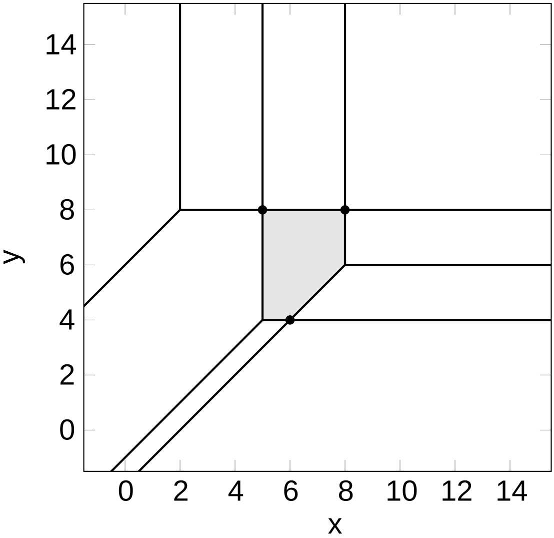
Los pagos IC.

Retomemos $L^{g} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos L^{g+} de esta matriz.

$$L^{g+} = L^{g} \quad L^{g\,2} \quad L^{g\,3} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Pagos IC

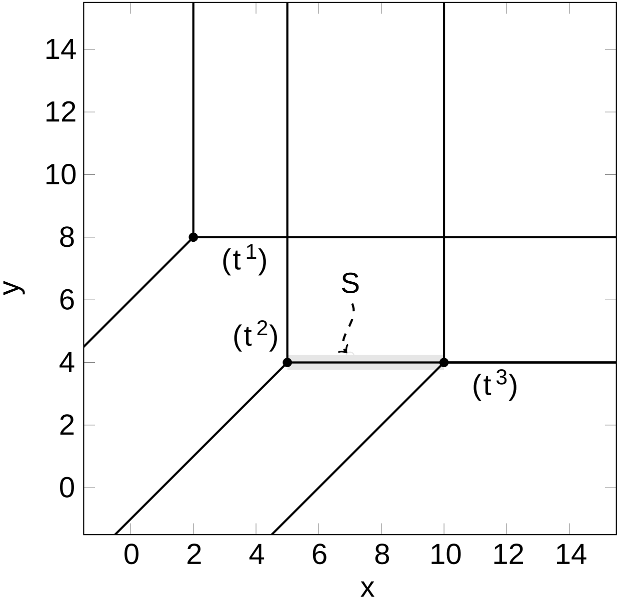


Teorema

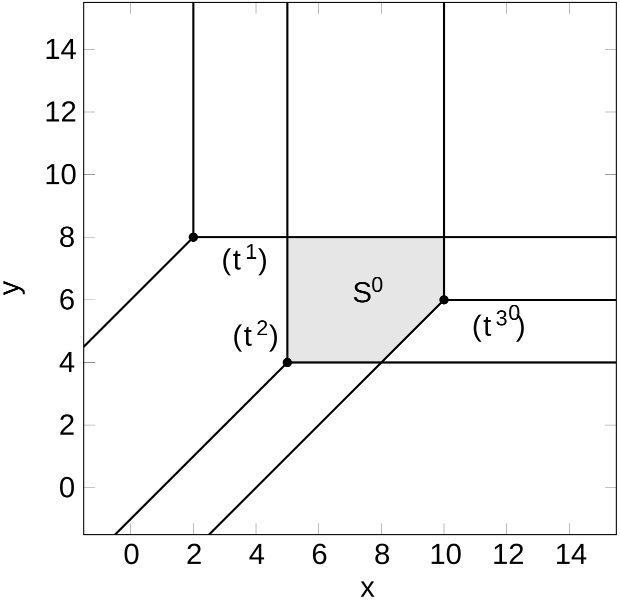
Considere un multiconjunto de tipos $T \subseteq \mathbb{TP}^{m-1}$, y un mecanismo de un solo agente (g, p), con función de resultados $g : T \to [m]$ y vector de pagos $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$.

1. Un mecanismo (g, p) es IC si y solo si $p \in P \in \mathrm{cells}(T)$, y $g \supseteq \underline{\mathrm{coVec}}_T(p)$ como un subgrafo. Luego P es el conjunto de todos los pagos IC de g.
2. Un vector $p \in \mathbb{TP}^{m-1}$ es la función de pagos para algún mecanismo IC (g, p) si y solo si $p \in \mathrm{basic}(T)$.
3. Si T es finito y genérico, entonces el conjunto de celdas básicas $\mathrm{cells}(T)$ es de dimensión completa del politopo tropical generado por T.
4. Sea $\{T^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia de conjuntos genéricos finitos que aproximan T. Luego las celdas básicas en $\mathrm{cells}(T)$ son limite en la métrica Hausdorff de las celdas básicas $\mathrm{cells}(T^k)$ cuando $k \to \infty$.

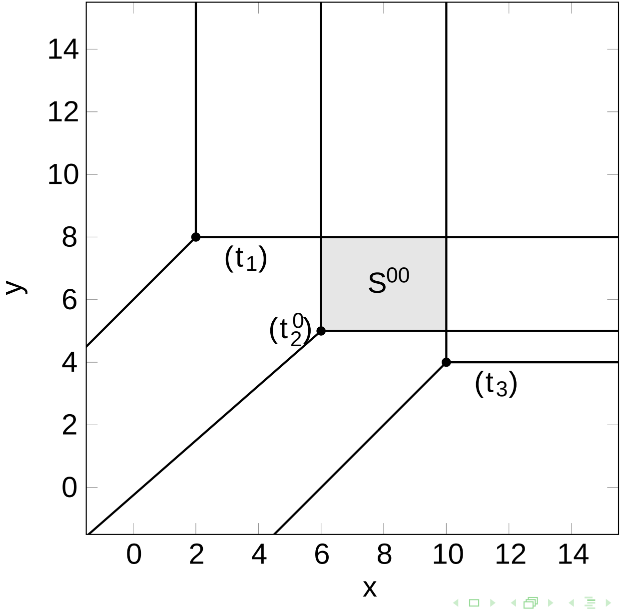
>Que pasa si el espacio de tipos es in nito o no generic



>Que pasa si el espacio de tipos es in nito o no generic

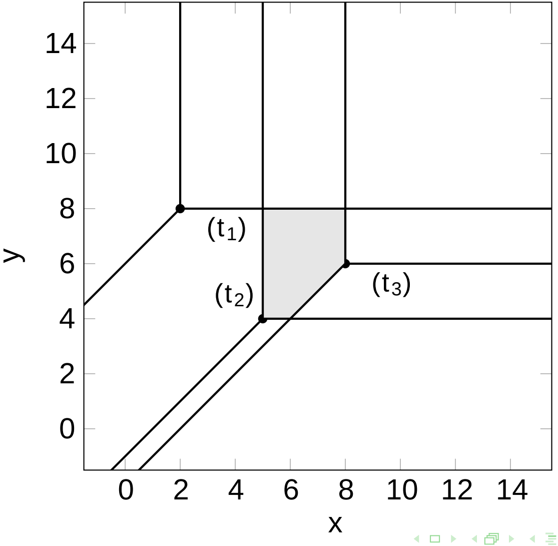


>Que pasa si el espacio de tipos es in nito o no generic



Indiferencia

La noción de indiferencia es muy importante en la economía, ¿dónde la encontramos en este contexto?



>Cómo de nimos \funciones" bajo esta noción?

>Como de nimos \funciones" bajo esta nocion?

Dados unos pagos, el principal escoge con la misma probabilidad la poltica cuando el agente es indiferente entre ellos

Esta interpretacion podra ser util cuando consideremos mas de un agente.

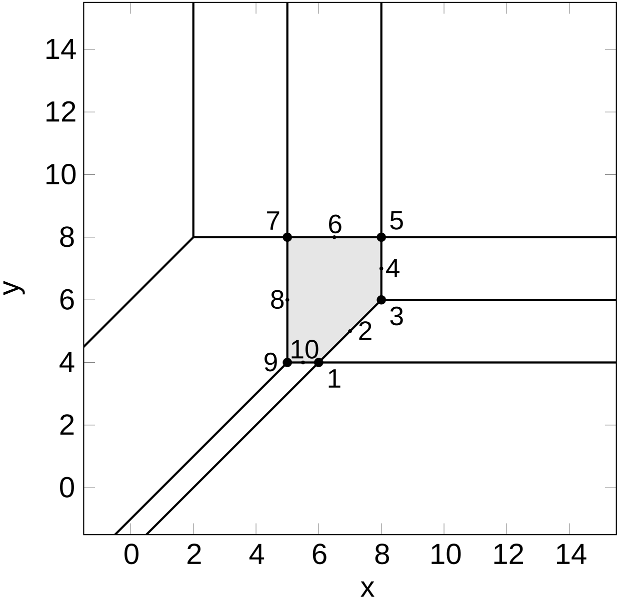
>Como de nimos \funciones" bajo esta nocion?

Dados unos pagos, el principal escoge con la misma probabilidad la poltica cuando el agente es indiferente entre ellos

Esta interpretacion podra ser util cuando consideremos mas de un agente.

>Que puntos podran tener esta condicion?

Arreglo de hiperplanos



Ventajas

Simpli ca el analisis de mecanismos: analisis y algebra geometra.

Ventajas

- Simpli ca el analisis de mecanismos: analisis y algebra geometra.
- Puede considerar espacios de tipos muy generales, tanto continuos como discretos, nitos e in nitos.

Ventajas

- Simpli ca el analisis de mecanismos: analisis y algebra geometra.
- Puede considerar espacios de tipos muy generales, tanto continuos como discretos, nitos e in nitos.
- Permite caracterizar todos los mecanismos IC para un espacio de tipos dado.

Desventajas

No es muy claro como extender estas nociones a mas de un agente.

Desventajas

No es muy claro como extender estas nociones a mas de un agente.

No brinda condiciones generales sobre la matriz de tipos para la implementabilidad de los mecanismos. >Cuando no funciona este metodo?

Desventajas

- No es muy claro como extender estas nociones a más de un agente.
- No brinda condiciones generales sobre la matriz de tipos para la implementabilidad de los mecanismos. ¿Cuándo no funciona este método?
- Falta mayor conexión con el diseño de mecanismos clásico, en especial con la single-crossing condition

Referencias

Butkovič, P. (2010). *Max-linear systems: Theory and algorithms*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, 1 edition.

Crowell, R. A. and Tran, N. M. (2017). Tropical geometry and mechanism design.

Krishna, V. (2009). *Auction Theory*. Academic Press, 2 edition.

Maschler, M., Solan, E., and Zamir, S. (2013). *Game Theory*. Cambridge University Press.

Speyer, D. and Sturmfels, B. (2004). Tropical mathematics.