

**No. 8**

OCTUBRE de 2018

quantil

ISSN 1234-5790 Edición electrónica

**Documentos  
de Trabajo**

**Distribuciones No Normales para la Selección de Activos en el Mercado Colombiano**

Andrés Galeano

Serie Documentos de Trabajo Quantil, 2018-20  
Edición electrónica.

OCTUBRE de 2018

**Comité editorial:**

Álvaro J. Riascos, CoDirector General y Director Modelos Económicos e I&D

Diego Jara Pinzón, CoDirector General y Director Matemáticas Financieras

Andrés F. Galeano Zurbaran, Director Asociado Matemáticas Financieras

Natalia Iregui Parra, Directora Administrativa

Simón Ramírez Amaya, Director de Tecnologías de la Información

Erick M. Translateur Martínez, Investigador

Mateo Dulce Rubio, Investigador

Hamadys L. Benavides Gutiérrez, Investigadora

© 2018, Quantil S.A.S., Matemáticas Financieras,  
Carrera 7 # 77 - 07. Oficina 901, Bogotá, D. C., Colombia  
Teléfonos: 3718132 – (310)6791459 – (320)8461236  
E-mail: [info@quantil.com.co](mailto:info@quantil.com.co)  
<http://www.quantil.com.co>

Impreso en Colombia – Printed in Colombia

La serie de Documentos de Trabajo Quantil se circula con propósitos de discusión y divulgación. Los artículos no han sido evaluados por pares ni sujetos a ningún tipo de evaluación formal por parte del equipo de trabajo de Quantil.

Publicado bajo licencia:



Atribución – Compartir igual

Creative Commons: <https://co.creativecommons.org>

# Distribuciones No Normales para la Selección de Activos en el Mercado Colombiano

Andrés Galeano\*

## Abstract

Modelos tradicionales para la construcción de portafolios son desarrollados sobre distribuciones normales. Un ejemplo de esto es la frontera eficiente propuesta por Markowitz, la cual solo incorpora los dos primeros momentos de la distribución (media-varianza) para la construcción de portafolios eficientes. Lo anterior requiere, al menos, que los portafolios posean una distribución elíptica. Adicionalmente, modelos de serie de tiempo se construyen frecuentemente sobre errores normales. Sin embargo, abundantes estudios rechazan la presencia de normalidad en mercados financieros e incluso literatura reciente ha encontrado que los retornos de índices accionarios colombianos exhiben distribuciones no normales. Considerando la evidencia literaria de distribuciones de los activos del mercado colombiano, modelos que no se restrinjan a distribuciones normales deberían generar mejores asignaciones de portafolio. El presente artículo demuestra que los retornos del mercado colombiano no siguen distribuciones normales y que, a través de la construcción de cópulas t y marginales logísticas e hiperbólicas generalizada, se supera ampliamente los métodos de estimación bajo normalidad. Adicionalmente, el estudio encuentra que la mayoría de activos mantienen una clase de distribución en el tiempo. Finalmente, se concluye que bajo distribuciones no-normales las fronteras eficientes no son necesariamente maximizadoras de utilidad y que el uso distribuciones no-normales generan retornos anuales entre 1% y 3% por encima de los retornos bajo distribuciones normales en el mercado accionario colombiano durante el periodo 2009-2016. Aunque el retorno per se no es el objetivo, el principal hallazgo consiste en que los portafolios construidos mediante supuestos normales, resultan ineficientes en un universo de distribuciones no-normales. Adicionalmente, se observa que los portafolios bajo distribuciones normales no se adecúan correctamente a los niveles de tolerancia por riesgo de los inversionistas, al no calibrar correctamente la distribución de resultados posibles.

---

\*Director Asociado del departamento de Matemáticas Financieras, Quantil S.A.S. Correo electrónico: andres.galeano@quantil.com.co

# 1 Introduction

El mercado colombiano ha tenido una valorización de 41.6% entre los años 2008 y 2017. Ésta se ha visto acompañada de un cambio mixto del número de actores de mercado (aumento en el número de acciones en circulación pero disminución en el número de comisionistas), representado por 22 comisionistas y 74 emisores en 2016, según información de la Bolsa de Valores de Colombia(3). Sin embargo, a pesar del alentador presente, son pocos los estudios realizados alrededor de los activos del mercado accionario colombiano. Entre éstos, Alonso y Torres (2014), encuentra cinco características del mercado colombiano. En primer lugar, los resultados revelan que el Índice General de la Bolsa de Colombia (IGBC) no sigue una caminata aleatoria y que los retornos presentes están correlacionados con los retornos pasados. El segundo hecho estilizado encontrado, relevante para el presente artículo, es que aunque presentan una forma acampanada, las distribuciones de los retornos de los activos financieros no siguen una distribución normal. Relacionado con éste, se encuentra que a medida que se aumenta la periodicidad de los retornos, éstos tienden a asemejarse a una distribución normal. Así, para retornos trimestrales no se descarta normalidad, mientras para meses y semanas sí. Adicionalmente, los autores observan que la volatilidad no es constante y que es mayor la autocorrelación del retorno con el valor absoluto de los retornos pasados, que el retorno con el cuadrado de los retornos pasados.

## 2 Revisión de literatura

La literatura que intenta estimar las distribuciones de los retornos del mercados accionarios es amplia. Ésta podría dividirse en modelos de valoración técnica – aquéllos que consideran que existe una relación entre los retornos pasados y futuros– y la valoración fundamental - aquéllos que utilizan toda la información presente disponible para calcular el precio teórico de la acción y los retornos esperados con la diferencia entre el precio actual y el teórico. En valoración técnica, los modelos se concentran en métodos auto-regresivos (ARIMA, GARCH, etc.) y en la calibración de distribuciones históricas. Las extensiones a estos modelos son numerosas: vectores autoregresivos, modelos de construcción de Cópulas, modelos de Markov Switching, modelos STAR (smooth transition auto-regressive), TAR (treshold auto-regressive), por mencionar algunos. Su capacidad predictiva ha sido ampliamente documentada en mercados desarrollados y subdesarrollados. Es así como se han aplicado modelos en Australia (Rong y Trück, 2009), Jordania (Atmeh y Dobbs, 2006), Perú (Humala y Rodriguez, 2013), el G7 (Guilodin, Hyde, McMillian y Ono, 2009), el G10, el ASEAN 5 (Wu, Pan y Tai, 2014), Japón (Yamamoto, 2012) y China (Ko, Lin, Su y Chang, 2013).

En contraposición, sobre el análisis fundamental existe poca literatura. Sin embargo, es utilizado frecuentemente por comisionistas de bolsa, combinado con opiniones personales

para tomar decisiones. Este consiste en generar un modelo de flujo de caja descontado para calcular el precio. Siendo la tasa de interés un punto clave para este modelo, es natural que los inversionistas tengan diferentes precios. En esta corriente, el modelo de valoración más utilizado es el modelo de Gordon & Shapiro (1956), conocido como el modelo de crecimiento de Gordon y el modelo de flujo de caja descontado.

Gran parte de la teoría desarrollada alrededor de valoración técnica se ha centrado en distribuciones normales y pocos modelos han sido desarrollados sin este supuesto. Sin embargo, estudios sobre normalidad de los retornos han encontrado que los mercados accionarios exhiben distribuciones no-normales. Para el caso de Colombia, esto fue estudiado por Alonso y Torres (2014), encontrando que los retornos diarios, semanales y mensuales poseen distribuciones no-normales. Por otra parte, también existen estudios para países como Australia (Rong y Trück, 2009), Perú (Humala y Rodríguez, 2013), Estados Unidos, el Reino Unido y el G7 (Guilodin, Hyde, McMillian y Ono, 2009). En contraposición, Ma y Serota (2014) logran aproximar exitosamente los retornos utilizando solo funciones normales para los retornos pasados y una gamma para la volatilidad. De manera similar, Eling (2014) demuestra que los retornos accionarios alemanes pueden ser bien representados por distribuciones normales y distribuciones t-student, es decir, distribuciones elípticas. Por lo anterior, el debate sobre el uso de distribuciones normales para los retornos en los mercados financieros continúa. El presente estudio pretende contribuir al debate, apoyando la hipótesis de no-normalidad en el mercado colombiano.

### 3 Preámbulo académico

En esta subsección, se describe la metodología y todos los aspectos teóricos utilizados en el estudio. Se parte de unos retornos logarítmicos obtenidos a partir de los precios de cierre de las acciones seleccionadas y a partir de éstos se desarrollan los modelos predictivos y se construyen portafolios maximizadores de utilidad. Para lograr aplicar correctamente las pruebas estadísticas de ajuste de los modelos, se deben poder obtener retornos iid. Sin embargo, lo anterior implicaría (i) distribuciones idénticas e (ii) independencia. Esto exige una transformación del método de estimación que permita capturar la correlación serial de los retornos accionarios, en caso de existir. Como primer candidato se presenta un modelo ARMA, cuyos errores, al ser independientes, se presentan como datos ideales para correr las pruebas de normalidad y de ajuste de Kolmogorov-Smirnov. Sin embargo, se ha demostrado previamente que existen clusters de volatilidad en los retornos (ver Alonso y Torres (2014)), por lo cual se requiere un modelo GARCH para poder garantizar que los residuales son iid. En este sentido, todas las pruebas de normalidad y ajuste deben ser implementadas sobre los residuales iid del modelo GARCH. La presente subsección se desarrolla de la siguiente manera: Inicialmente se describe el modelo EGARCH, del cual se obtienen los residuales para

realizar las pruebas de normalidad. También se implementan modelos ARMA-EGARCH bajo errores con distribuciones logística, t-student, skew t, hiperbólica generalizada y uniforme. Posteriormente, se construyen las cópulas y marginales sobre los residuales del modelo y, a partir de éste, se simulan los retornos bajo el modelo ARMA.

### 3.1 Modelo ARMA-EGARCH

Bajo la hipótesis de mercados eficientes, el mercado incorpora toda la información disponible y, por tanto, no existen estrategias que permitan superar al mercado consistentemente. Sin embargo, esa hipótesis ha sido descartada en diferentes estudios - por ejemplo, Perez y Mendoza (2010)-. Estos estudios han encontrado correlación de los retornos pasados con los retornos futuros, por lo cual se plantea inicialmente un modelo ARMA de orden  $(p,q)$ . Sea  $r_t$  el retorno de la acción  $j$  en el tiempo  $t$ :

$$r_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

donde  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Típicamente, el modelo ARMA sería suficiente para obtener residuales iid sobre los cuales aplicar las pruebas de normalidad. Sin embargo, la presencia de clusters de volatilidad en el tiempo genera heterocedasticidad en los errores, por lo cual se hace necesario un modelo GARCH que permita estimar la volatilidad de los errores en el modelo ARMA. Es importante aclarar que, si los errores tienen una distribución normal, la distribución de los retornos también la tendrá. Lo anterior no aplica para errores con distribuciones no normal.

Siguiendo la línea de distribuciones normales, se corrigen los clusters de volatilidad a partir de un modelo ARMA-GARCH. La diferencia principal es que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ . En este caso, se utiliza un EGARCH definido como:

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^q \beta_k g(Z_{t-k}) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \log \sigma_{t-k}^2, \quad (2)$$

Con  $g(Z_t) = \theta Z_t + \lambda(|Z_t| - E(|Z_t|))$ , donde  $\lambda$  es una constante. Una vez obtenidos estos errores, puede recuperarse  $\sigma_t^2 \forall t$ . Cabe aclarar que  $Z_t$  puede tener cualquier distribución, normal o no-normal. Una vez recuperada  $\sigma_t^2$ , es posible transformar la ecuación del ARMA dividiendo sobre la desviación estándar:

$$\frac{r_t}{\sigma_t} = \frac{c + \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t}{\sigma_t}, \quad (3)$$

donde  $\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim N(0, 1)$ . El anterior proceso, conocido como DEGARCHING permite obtener errores iid a partir de los cuales se genera la distribución de los retornos accionarios. Sobre estos errores es posible entonces realizar las pruebas de normalidad y de ajuste.

Cabe recalcar que los errores se han supuesto normales, lo cual no necesariamente es cierto. De hecho, se espera rechazar la normalidad de estos errores en el estudio. La alternativa es entonces simular errores con distintas distribuciones. Lo anterior tiene una serie de implicaciones. La primera, es que para cada distribución de los errores, los estimadores son diferentes, por lo que se debe recalibrar el modelo ARMA-GARCH cada vez que se cambie algún supuesto sobre el modelo. La segunda implicación es que distribuciones más complejas requieren supuestos sobre el tercer y cuarto momento de los errores.

Como simplificación, se supondrá que el tercer y cuarto momento (curtosis y asimetría) de los residuales del modelo ARMA son estables en el tiempo y que solo la varianza cambia - esto no supone que los residuales del modelo EGARCH tenga curtosis y asimetría constante. En este sentido, la especificación de la ecuación (3) se mantiene para cualquier distribución, cambiando únicamente la distribución de  $\varepsilon$ .

### 3.2 Pruebas de normalidad

Una vez se han obtenido los errores estandarizados del modelo ARMA bajo normalidad, se aplican tres pruebas de normalidad a éstos. Estas pruebas son: (i) la prueba de Shapiro-Wilk, (ii) la prueba de Jarque-Bera y (iii) la prueba de Anderson-Darling.

Denotando los residuales recuperados como  $\varepsilon$ , la prueba de Shapiro-Wilk consiste en calcular el siguiente estadístico:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2} \quad (4)$$

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}} \quad , \quad (5)$$

donde  $\varepsilon_{(i)}$  es la observación  $i$  de los  $\varepsilon$  ordenados,  $m = (m_1, \dots, m_n)^T$  y  $V$  son los valores esperados de cada  $i$  y la varianza de una distribución normal, respectivamente. Es decir,  $\varepsilon(1)$  corresponde al retorno más bajo de todos los retornos observados.

Por otra parte, la prueba de Jarque-Bera consiste en determinar si la curtosis y asimetría

de una distribución corresponden a las de una normal. El estadístico relacionado es:

$$JB = \frac{n - k + 1}{6} \left( S^2 + \frac{1}{4}(C - 3)^2 \right) \quad (6)$$

$$S = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 \right)^{3/2}} \quad (7)$$

$$C = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 \right)^2} . \quad (8)$$

Para muestras grandes, por ejemplo  $N \geq 2000$ , el estadístico puede ser rechazado con una distribución  $\chi^2$  con  $N$  grados de libertad. Para muestras más pequeñas, se utilizan simulaciones de Montecarlo y se interpola para llegar a los p-valores.

Por último, la prueba de Anderson-Darling consiste en determinar si una muestra proviene de una distribución paramétrica, aunque para el estudio se utilizará únicamente para normalidad. La prueba consiste en calcular el siguiente indicador:

$$A = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(\varepsilon) - F(\varepsilon))^2}{F(\varepsilon)(1 - F(\varepsilon))} dF(\varepsilon) . \quad (9)$$

### 3.3 Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Luego de calibrar diferentes modelos, cada uno con diferentes distribuciones en los errores, se busca encontrar la clase de distribución que mejor se ajuste a los errores asumidos. Para el caso de errores normales, por ejemplo, se calibra una distribución normal sobre estos errores y se mide el ajuste a partir de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, una prueba no paramétrica que busca determinar si dos muestras proveen de la misma distribución. Para la prueba de K-S, se toman los retornos históricos semanales entre los años 2012 y 2016, se recuperan los residuales de los modelos y se calcula la función de distribución acumulada empírica de éstos últimos utilizando la siguiente ecuación:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[-\infty, x]}(\varepsilon_i) , \quad (10)$$

donde la función indicador toma el valor de 1 si  $r_i$  es menor a  $x$  y 0 de lo contrario.

Posteriormente, se calculan las distribuciones teóricas de los residuales por máxima verosimilitud. Por último, se calcula el estadístico de Kolmogorov-Smirnov y el p-valor correspondiente.

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (11)$$



$$\Pr(K \leq x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \pi^2 / (8x^2)} \quad (12)$$

Para robustecer el análisis, la muestra utilizada para calcular la distribución por máxima verosimilitud y la muestra para calcular el indicador de Kolmogorov-Smirnov son diferentes. Para esto, se realiza un 2-fold cross validation, la cual divide las observaciones en 2 submuestras. En el primer caso, la submuestra A se utiliza para calcular los parámetros y la submuestra B se utiliza en la prueba de K-S. En el segundo caso se invierten los roles. Por último, se promedian los valores  $D_n$ .

### 3.4 Construcción de la cópula gaussiana y cópula t

Bajo el teorema de Sklar(1959), se establece que cualquier distribución conjunta se puede especificar a partir de únicamente las marginales y una cópula que describa la estructura de dependencia entre ellas. Por una parte, las distribuciones marginales se obtienen calibrando la distribución que tenga menor distancia en el indicador de Kolmogorov-Smirnov. En segundo lugar, se proponen dos cópulas (gaussiana y t). Para la cópula gaussiana, se calibran los parámetros  $\Sigma$  y  $\mu$  de la distribución normal multivariada maximizando la función de verosimilitud de la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(\mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{R} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{R} - \mu) \right) , \quad (13)$$

donde  $R$  es un vector de retornos de dimensión  $d * 1$ , siendo  $d$  el número de activos financieros analizados. Posteriormente, podemos invertir individualmente la distribución de cada marginal, calibrando la función de densidad del activo  $j$  -  $\Phi_j(R)$  - y utilizando la función inversa  $\Phi_j^{-1}$ . Nótese que la distribución de  $\Phi_j^{-1}(x_j)$  tiene una distribución uniforme entre 0 y 1, denotado como  $u_j$ . De esta manera, se puede expresar la cópula de la siguiente manera:

$$C_R^{\text{Gauss}}(u) = \Phi_R \left( \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d) \right) , \quad (14)$$

donde  $R$  es la matriz de correlaciones lineales y  $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

Por último, para pasar de la cópula a distribuciones conjuntas con diferentes distribuciones, se deben convertir las distribuciones uniformes de la cópula a su distribución marginal correspondiente:

$$F(r_1, r_2, \dots, r_d) = C \left( f_1^{-1}(u_1), f_2^{-1}(u_2), \dots, f_d^{-1}(u_d) \right) . \quad (15)$$

La diferencia entre la cópula t y la cópula gaussiana es la la función de densidad conjunta. Para la cópula t con parámetros  $(v, \Sigma, \mu)$ , la función de densidad conjunta es:

$$f(\mathbf{R}) = \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{(\pi v)^d |\Sigma|}} \left(1 + \frac{(\mathbf{R} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{R} - \mu)}{v}\right) . \quad (16)$$

### 3.4.1 Fronteras eficientes, funciones de utilidad y selección de activos

Una vez se tiene la distribución de los activos financieros, se puede construir una infinidad de portafolios, cada uno con su respectiva distribución. Como se mencionó previamente, esto resulta computacionalmente exhaustivo, por lo que se definen aproximaciones que permitan alcanzar portafolios óptimos con una alta probabilidad. Para lo anterior, se definen dos fronteras que maximizan el retorno y minimizan alguna medida de riesgo. Sin embargo, ninguna medida de riesgo captura todo el riesgo de una distribución, por lo que se prueban varias medidas de riesgo paralelamente. Una alternativa, tema de estudios futuros, es hacer una metafrontera que capture los cuatro momentos de la distribución. Sin embargo, para el presente estudio, las medidas de riesgo escogidas son Varianza y *Expected Shortfall*.

Para la construcción de la frontera de Media-Varianza, se resuelve el siguiente problema de optimización cuadrático por medio de la metodología del punto interior.

$$\min_w \sigma_w \quad s.a : \mu_w = e; \quad e \in \mathbb{R} \quad (17)$$

$$\min_w w * \Sigma * w^T \quad s.a : w * \mu = e; \quad e \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

donde  $w$  es el vector de pesos del portafolio,  $\mu$  es el vector de retornos esperados y  $\Sigma$  es la matriz de varianza-covarianza. Para el anterior problema el tiempo crece linealmente en el número de puntos “e”, por lo que se puede escoger un número relativamente alto sin inconvenientes computacionales. En este sentido, para construir la frontera eficiente se escogen 200 puntos (“e”) equidistantes y distribuidos entre el mínimo y máximo retorno posible.

Por otra parte, la construcción de la frontera de Media-CVaR se basa en el programación matricial del esquema propuesto por Salahi, Mehrdoust y Piri (2013)(15):

$$\min_x c^T * x ; \quad s.a : A * x \geq b_0; \quad (19)$$

Donde:

$$c^T = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{-1}{(1-\alpha)*S} \quad \dots \quad \frac{-1}{(1-\alpha)*S} \quad -1 \right)$$

$$x^T = ( w_1 \quad \dots \quad w_N \quad d_1 \quad \dots \quad d_S )$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & \dots & \mu_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{11} & \dots & r_{1N} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ r_{21} & \dots & r_{2N} & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ r_{S1} & \dots & r_{SN} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_{Min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $d_s$  es el retorno del portafolio en el escenario  $s$ ,  $S$  es el número de simulaciones,  $N$  el número de activos,  $\mu_i$  el retorno esperado del activo  $i$ , y  $\alpha$  es el percentil del *Expected Shortfall*. El anterior problema, al igual que el de minimización de la varianza, permite obtener un punto de la frontera eficiente: el punto con retorno esperado  $r_{Min}$ .

Una vez se obtienen todos los portafolios de la frontera eficiente, la selección de activos se realiza maximizando la función de utilidad del inversionista. La siguiente función se escoge por su capacidad de ajuste a diferentes niveles de aversión, dominio completo y porque depende de, al menos, los primeros cuatro momentos de la distribución de los retornos del portafolio:

$$U(r) = (1 + r)^\rho \text{ si } \rho > 0 \quad (20)$$

$$U(r) = -(1 + r)^\rho \text{ si } \rho < 0, \quad (21)$$

donde  $\rho$  es un parámetro definido por el nivel de aversión del inversionista, calibrado con el equivalente de certeza de una apuesta de 10% y -10% con la misma probabilidad. Se escogen tres niveles para garantizar un recorrido sobre la frontera: -2.5%, -4% y -7%.

$$\rho : (1 + \text{EquivalenteDeCerteza})^\rho = 0.5 * (1 + 0.1)^\rho + 0.5 * (1 - 0.1)^\rho \text{ si } \rho > 0 \quad (22)$$

$$-(1 + \text{EquivalenteDeCerteza})^\rho = -0.5 * (1 + 0.1)^\rho - 0.5 * (1 - 0.1)^\rho \text{ si } \rho < 0 \quad (23)$$

Con el parámetro  $\rho$  definido, se escoge el portafolio que maximice la utilidad esperada del inversionista. Para el estudio, los parámetros  $\rho$  definidos son  $-4.14$ ,  $-7.80$ ,  $-20.66$ .

## 4 Datos y método de evaluación

Para los objetivos propuestos en el estudio, se obtienen datos de todas las acciones disponibles en la Bolsa de Valores de Colombia. Sin embargo, muchas de estas acciones son ilíquidas, poseen altos costos de transacción o no transan durante varios días o semanas. En este sentido, solo se incluyen en el estudio las acciones cuyo porcentaje de días que se transan es igual o superior a 80%. Bajo este criterio, 26 activos financieros hacen parte del portafolio posible de los inversionistas. Aunque el universo de acciones se reduce considerablemente, está debidamente justificado por dos razones significativas. La primera es que las acciones con baja liquidez tienden a ser acciones fuera del índice COLCAP, poco consideradas por los inversionistas por los altos costos de transacción y la poca observabilidad del precio. La segunda razón obedece a que la falta de liquidez dificulta la calibración de distribuciones, ya que los movimientos observados son los acumulados de varios días.

Para cada activo se obtienen precios diarios, con una historia de máximo 10 años (2008-2017). En la tabla 1 se observan los cuatro primeros momentos de los activos considerados en el estudio entre el 2008/01/01 y el 2017/02/01. Se observa en primer lugar que todos los activos poseen una curtosis superior a la de una normal, mientras que la asimetría es en la mayoría de los casos negativa.

Por otra parte, se elimina una de las acciones entre preferencial y ordinaria, si aplica, dada la alta correlación entre ambas. De éstas, se utiliza la acción más líquida. Así, el universo final de activos se compone de 21 acciones.

El método de evaluación de normalidad consiste en dos partes. La primera incluye tres pruebas de normalidad (Shapiro-Wilk, Jarque-Bera y Anderson-Darling). Si bien es posible rechazar normalidad, es probable que el tipo de distribución paramétrica que mejor represente los retornos históricos sea la normal. En ese sentido, la segunda parte plantea usar el estadístico de Kolmogorov-Smirnov para comparar distribuciones. Las funciones paramétricas escogidas son logística, uniforme, skew-t e hiperbólica generalizada. Si bien el universo de distribuciones continuas es inmenso, estas cubren la mayoría de distribuciones utilizadas en los mercados financieros.

Después de haber escogido las mejores distribuciones marginales y una vez construido la cópula, se generan fronteras eficientes en términos de media-varianza y media-Expected Shortfall. A partir de estas dos fronteras, se construye un criterio de decisión de la maximización de utilidad. Se espera que, si los retornos no tienen una distribución

Acción	Media	Desviación	Curtosis	Asimetría
BCOLO	-0.00	0.02	4.63	0.04
PFBCOLO	-0.00	0.01	4.84	0.17
BIOMAX	0.00	0.03	351.27	-2.71
BOGOTA	-0.00	0.01	6.08	-0.16
BVC	-0.00	0.02	5.58	-0.17
CELSIA	-0.00	0.02	7.38	0.52
CEMARGOS	0.00	0.02	5.58	-0.35
CEMEX	-0.00	0.02	4.89	-0.12
COLTEJER	0.00	0.03	197.79	-0.65
CONCRETO	-0.00	0.02	11.78	0.63
CORFICOL	0.00	0.01	4.97	0.02
ECOPETROL	-0.00	0.02	6.41	-0.14
EEB	0.00	0.01	7.34	0.11
ETB	0.00	0.02	39.82	-2.43
ÉXITO	-0.00	0.02	7.33	-0.37
AVAL	-0.00	0.01	8.98	-0.25
SURA	-0.00	0.01	5.60	-0.17
PFSURA	-0.00	0.01	5.07	-0.12
ISA	0.00	0.02	7.79	-0.36
NUTRESA	-0.00	0.01	4.90	0.07
PFAVAL	-0.00	0.01	7.23	-0.10
AVIANCA	-0.00	0.02	15.02	0.59
PFCEMARGOS	0.00	0.01	5.02	-0.09
PFDVIVIENDA	0.00	0.02	5.97	-0.60
ARGOS	-0.00	0.02	5.33	-0.09
PFARGOS	-0.00	0.02	4.41	-0.24

Table 1: Primeros momentos de los retornos accionarios. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

normal, la frontera de media-varianza no revele toda la información sobre el riesgo del portafolio y que, por tanto, la utilidad esperada de esta frontera sea inferior a la de fronteras Media-VaR y Media-Expected Shortfall. Por otra parte, se considera valioso estudiar otros portafolios que estén dentro de la frontera, ya que, al romper el supuesto de normalidad, es posible que los puntos eficientes no se encuentren dentro de ninguna de estas dos fronteras.

## 5 Resultados

La sección de resultados se divide en cuatro subsecciones. La primera analiza las distribuciones calibradas utilizando todos los datos disponibles. La segunda subsección se centra en el análisis intertemporal de las distribuciones marginales, evaluando si esta

converge a una distribución “verdadera” o si cambios en esta distribución son estables en el tiempo. A partir de los dos primeros resultados, la tercera subsección se enfoca en la construcción de fronteras eficientes y evalúa los costos y beneficios de usar una u otra frontera bajo no-normalidad. Finalmente, la cuarta subsección cuantifica los efectos de asumir normalidad.

## 5.1 Calibración de marginales

Los p-valores de las pruebas de normalidad aplicadas a las 21 acciones iniciales se muestran en el Tabla 2. Los resultados muestran que para todas las acciones se rechaza normalidad al 1% en todas las pruebas. Como apoyo adicional, se grafican algunas distribuciones de los retornos y su respectiva distribución normal, los cuales se pueden consultar en los anexos. Por otra parte, el hecho de rechazar normalidad no implica que exista una mejor distribución paramétrica. Casos en los que la curtosis cercana a 3 y la asimetría sea cercana a cero podrían ser mejor explicadas por una normal que por otras distribuciones. Por lo anterior, se realizan pruebas de Kolmogorov-Smirnov para comparar distribuciones. Los resultados se muestran en el Tabla 3.

Acción	Jarque-Bera	Anderson-Darling	Shapiro-Wilk	¿Normalidad?
PFBCOLO	0.00	0.00	0.00	No
BIOMAX	0.00	0.00	0.00	No
BOGOTA	0.00	0.00	0.00	No
BVC	0.00	0.00	0.00	No
CELNoA	0.00	0.00	0.00	No
CEMARGOS	0.00	0.00	0.00	No
CEMEX	0.00	0.00	0.00	No
COLTEJER	0.00	0.00	0.00	No
CONCRETO	0.00	0.00	0.00	No
CORFICOL	0.00	0.00	0.00	No
ECOPETROL	0.00	0.00	0.00	No
EEB	0.00	0.00	0.00	No
ETB	0.00	0.00	0.00	No
ÉXITO	0.00	0.00	0.00	No
AVAL	0.00	0.00	0.00	No
SURA	0.00	0.00	0.00	No
ISA	0.00	0.00	0.00	No
NUTRESA	0.00	0.00	0.00	No
AVIANCA	0.00	0.00	0.00	No
PFDVIVIENDA	0.00	0.00	0.00	No
ARGOS	0.00	0.00	0.00	No

Table 2: Pruebas de normalidad en activos financieros colombianos. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

Una vez se han calibrado las marginales, se realizan simulaciones de las distribuciones conjuntas a través de una cópula t.

Por otra parte, las distribuciones acumuladas individuales de los residuales se encuentran en las figuras 2 - 7, ubicadas en los anexos. En color azul se grafica la densidad simulada a partir de la muestra de entrenamiento y en negro la densidad observada de la muestra de prueba. Como se observa en los gráficos, las distribuciones calibradas parecen ajustarse a los datos observados de una manera satisfactoria; el mismo resultado se observa en el estadístico de K-S. Bajo los resultados de la tabla 3, se observa que las distribuciones que mejor se ajustan a los retornos históricos son la logística (4 acciones), la skew-t (4 acciones) y la hiperbólica (12 acciones). El resultado es importante, ya que muestra que los residuales de la mayoría de acciones requieren de más de dos momentos (media y desviación) para ser explicadas de manera adecuada. Finalmente, en ninguna acción se rechazan todas las distribuciones calibradas en la prueba de K-S. En el Tabla 3 se observan algunas acciones con el mensaje “No convergió”, lo cual implica que el algoritmo de maximización de verosimilitud fue incapaz de encontrar un valor óptimo.

Acción	Normal	Logística	SkewT	Uniforme	Hiperbólica	Ganador
PFBCOLO	0.07	0.04	0.04	0.27	0.04	Hiperbolica
BIOMAX	0.50	0.49	No Convergió	0.78	1.00	Logistica
BOGOTA	0.13	0.12	0.08	0.30	0.05	Hiperbolica
BVC	0.11	0.09	0.08	0.29	0.07	Hiperbolica
CELSIA	0.10	0.07	0.06	0.34	0.03	Hiperbolica
CEMARGOS	0.07	0.05	0.04	0.36	0.03	Hiperbolica
CEMEX	0.08	0.07	0.07	0.37	0.30	SkewT
COLTEJER	0.50	0.49	No Convergió	0.83	1.00	Logistica
CONCRETO	0.15	0.19	No Convergió	0.42	0.47	Normal
CORFICOL	0.07	0.06	0.05	0.30	0.04	Hiperbolica
ECOPETROL	0.10	0.07	0.06	0.31	0.07	SkewT
EEB	0.11	0.09	0.07	0.34	0.09	SkewT
ETB	0.16	0.13	No Convergió	0.44	0.06	Hiperbolica
ÉXITO	0.09	0.05	0.04	0.35	0.04	Hiperbolica
AVAL	0.12	0.10	No Convergió	0.36	0.12	Logistica
SURA	0.08	0.05	0.03	0.29	0.03	Hiperbolica
ISA	0.11	0.08	0.08	0.41	0.08	Hiperbolica
NUTRESA	0.08	0.05	0.05	0.29	0.25	SkewT
AVIANCA	0.11	0.07	No Convergió	0.48	0.04	Hiperbolica
PFDVIVIENDA	0.08	0.05	0.04	0.37	0.04	Hiperbolica
ARGOS	0.09	0.07	0.07	0.38	0.10	Logistica

Table 3: Prueba de Kolmogorov-Smirnov. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

## 5.2 Distribuciones a lo largo del tiempo

Según la teoría, solo la presencia de choques debería modificar la clase de distribución que mejor se ajusta a los residuales de un activo. El objetivo de la presente sección es evaluar si dichos residuales poseen una única clase de distribución a lo largo del tiempo. Un resultado afirmativo tendría una implicación inmediata. Sugeriría que si el administrador del fondo de inversión puede asumir con un alto nivel de cofianza, que el tipo de distribución encontrada se mantendrá durante el periodo de inversión.

Para lograr dicho objetivo, se calibra la probabilidad empírica de cambiar de distribución semana a semana, presentada en el Tabla 4. Se observa que las probabilidades de pasar de una distribución a otra son inferiores al 1%, las cuales se reducen considerablemente cuando se encuentra que la mejor distribución es la distribución hiperbólica.

Acción	Num Dist	P Cambio	P Hiper
BCOLO	4.00	0.60	0.34
PFBCOLO	4.00	0.61	0.29
BIOMAX	3.00	0.50	0.25
BOGOTA	3.00	0.52	0.19
BVC	4.00	0.52	0.24
CELSIA	4.00	0.63	0.38
CEMARGOS	4.00	0.60	0.32
CEMEX	3.00	0.65	0.37
COLTEJER	3.00	0.21	
CONCONCRETO	3.00	0.35	0.32
CORFICOL	3.00	0.56	0.52
ECOPETROL	3.00	0.59	0.43
EEB	3.00	0.49	0.42
ETB	3.00	0.61	0.31
ÉXITO	4.00	0.57	0.50
AVAL	3.00	0.52	0.25
SURA	3.00	0.60	0.48
PFSURA	3.00	0.62	0.42
ISA	3.00	0.58	0.46
NUTRESA	3.00	0.63	0.40
PFAVAL	3.00	0.54	0.23
AVIANCA	3.00	0.62	0.43
PFCEMARGOS	3.00	0.64	0.49
PFDAVIVIENDA	3.00	0.66	0.48
ARGOS	3.00	0.61	0.44
PFARGOS	3.00	0.61	0.40

Table 4: Cambios en clases de distirbución. Fuente: Reuters. Calculo del autor.



### 5.3 Fronteras eficientes

Para demostrar que las fronteras eficientes bajo no-normalidad no garantizan contener los puntos que maximizan la utilidad de los inversionistas, se toman diferentes momentos del tiempo y se muestra como, en más del 50% de las semanas analizadas, los portafolios que maximizan la utilidad del individuo no se encuentran sobre ninguna de las dos fronteras eficientes (Media-Varianza y Media-CVaR). Lo anterior pone de manifiesto que analizar únicamente una medida de riesgo, deja de lado momentos de la distribución que son relevantes bajo no-normalidad. A manera de ejemplo, para el portafolio construido el 2009-01-06, se encuentra una mejora en la “utilidad esperada” para portafolios con alta aversión. El portafolio sugerido para ese nivel de aversión se encuentra dividido entre Ecopetrol (52.38%), Grupo Aval (2.51%), Sura (18.25%) e ISA (26.86%). Sin embargo, se encuentra un portafolio similar con una utilidad esperada mayor pero que no minimiza ni la varianza ni el CVAR: Ecopetrol (53.81%), Grupo Aval (1.66%), Sura (17.61%) e ISA (26.92%). Este portafolio genera una utilidad esperada de -1.2352 contra -1.2356 del portafolio “óptimo”. En términos del equivalente de certeza, la diferencia entre las utilidades es equivalente a una diferencia de rentabilidades corregidas por riesgo de 0.0006% semanal - o de 0.35% anual. Los resultados agrupados se muestran en el Tabla 5. En estos se observa una concentración de portafolios sub-óptimos bajo altos niveles de no-normalidad.

Indicador	Valor
# de semanas con portafolio maximizador fuera de la frontera	222
# de semanas con portafolio maximizador dentro de la frontera	199
Porcentaje de semanas con portafolio maximizador fuera de la frontera	52.73

Table 5: Resultados sobre fronteras eficientes. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

### 5.4 Desempeño de las estrategias

Por medio de un backtest desde el 01/01/2009 hasta el 07/02/2017, se calibran los portafolios óptimos de cada frontera para cada semana, para tres distintos niveles de aversión. El desempeño de cada estrategia, para diferentes niveles de aversión al riesgo, se muestra en el Tabla 6. Las columnas muestran la estrategia, el retorno total de la estrategia, el retorno promedio, la desviación estándar del retorno, el percentil 5, la razón de Sharpe, el equivalente de certeza (EC) semanal y el equivalente de certeza total. Por otra parte, las estrategias analizadas son todas las combinaciones de los siguientes elementos: (i) No Normalidad (NN) o Normalidad (Nor), (ii) Frontera Media-CVaR (CVaR) o Media-Varianza (Var), (iii) Aversión baja (BA), aversión media (MA) o aversión alta al riesgo (AA). Se omite la estrategia Nor-CVaR al ser idéntica a la estrategia Nor-Var.

Estrategia	RetTotal	RetPromedio	StdDev	VaR 5%	Sharpe	EC semanal	EC total
COLCAP	136.74	0.10	2.38	-2.36	0.04		
CVaR - NN - AA	200.39	0.20	2.58	-2.67	0.08	0.02	10.05
Var - NN - AA	189.83	0.19	2.58	-2.61	0.07	0.00	3.85
Var - Nor - AA	185.20	0.18	2.61	-2.65	0.07	0.00	1.20
CVaR - NN - MA	184.29	0.18	2.72	-2.93	0.07	-0.01	-4.36
Var - NN - MA	163.01	0.15	2.72	-2.95	0.06	-0.04	-15.71
Var - Nor - MA	135.32	0.11	2.68	-2.95	0.04	-0.08	-28.90
CVaR - NN - BA	172.74	0.17	2.84	-3.11	0.06	-0.04	-15.39
Var - NN - BA	158.85	0.15	2.87	-3.12	0.05	-0.06	-23.35
Var - Nor - BA	159.40	0.15	2.81	-2.93	0.05	-0.06	-20.97

Table 6: Resultados generales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

En primer lugar, se observa que las asignaciones bajo no-normalidad superan ampliamente la asignaciones bajo normalidad, generando ganancias totales superiores en al menos 20%. Además, los equivalentes de certeza totales bajo no-normalidad son, al menos, 5% superiores a aquellos bajo normalidad. Este supuesto representa un aumento en EC anual de 0.6%. Es decir, el inversionista estaría perdiendo 0.6% del retorno anual por omitir la no-normalidad. Además, el uso de la frontera de CVaR bajo distribuciones no-normales supera el uso de la frontera Media-Varianza en todos los casos, al comparar el equivalente de certeza, aunque en los primeros años presentan comportamientos muy similares, como se observa más adelante. La principal explicación de esta segunda conclusión radica en la inclusión de mayor información a partir de la frontera de Media-CVaR frente a la frontera Media-Varianza, particularmente en escenarios de *stress*. Adicionalmente, la razón de Sharpe es superior bajo la estrategia de no-normalidad y CVaR frente a las demás estrategias en el periodo analizado. Finalmente, todas las estrategias superan el rendimiento del COLCAP, aunque asumen una mayor volatilidad, a excepción de la estrategia de normalidad con aversión media.

Para complementar el análisis, en la figura 1 se muestra el comportamiento de cada estrategia junto al benchmark. Adicionalmente, el Tabla 7 - en los anexos - muestra los desempeños año por año, exhibiendo algunos resultados interesantes. Particularmente, se observa que el desempeño ante fuertes caídas del COLCAP son superiores en modelos bajo no-normalidad, apoyando la idea de una mejor medición del riesgo bajo estos modelos. Para aversión media, en particular, se observa que en todos los años de caídas del COLCAP, la estrategia de media-CVaR supera la estrategia de media-varianza. Aunque lo anterior no se mantiene para baja aversión, la explicación radica en que para estos niveles el modelo no busca minimizar el riesgo sino, en la mayoría de los casos, maximizar el retorno.

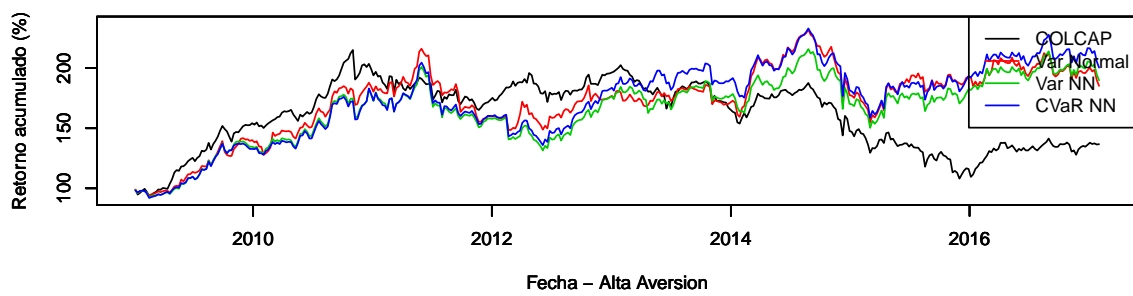
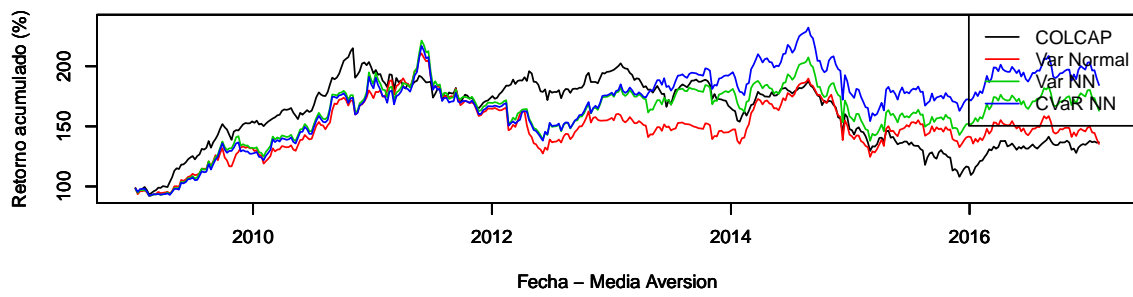
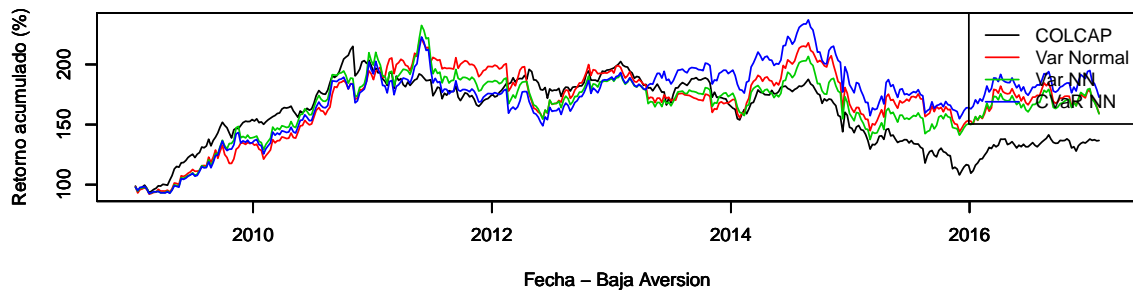


Figure 1: Comportamiento de las estrategias y el benchmark.

## 6 Conclusiones

El presente artículo contiene varios aportes sobre distribuciones de los activos financieros y asignación de portafolios. En primer lugar, encuentra que las distribuciones exhibidas por el mercado accionario colombiano entre el 2008 y el 2017 no se ajustan adecuadamente a una distribución normal y que, por tanto, el uso de modelos normales para la estimación de retornos accionarios resulta en asignaciones que no necesariamente son óptimas para el portafolio administrado. Lo anterior tiene claras implicaciones para los administradores de fondos de inversión colectiva. El estudio sugiere siempre utilizar modelos no-normales, lo que en el periodo 2009-2017 hubiera generado beneficios en promedio del 2% anual, por encima de los modelos normales.

En segundo lugar y como consecuencia del primero, el presente documento critica la aplicación de fronteras eficientes de Media-Varianza. Aunque el estudio encuentra que el uso de fronteras de Media-CVaR genera mejores asignaciones de portafolio, se evidencia la existencia de puntos al interior de (y no sobre) las fronteras con utilidades esperadas mayores a las de todos los puntos de la frontera, dada la presencia de no-normalidad. Lo anterior sugiere explorar activos por fuera de ambas fronteras, para maximizar la función de utilidad. Este resultado plantea un complejo reto para los administradores de fondos, pues extiende el universo de portafolios posibles y exige nuevas metodologías de optimización. Una posibilidad para trabajo futuro consiste en metodologías de optimización multidimensional. Por ejemplo, una frontera en cuatro dimensiones (media, varianza, curtosis y asimetría) podría albergar mejores resultados.

Las recomendaciones del estudio para los administradores de fondos de inversión son, en estricto orden, (i) estimar la distribución de los retornos accionarios, teniendo en cuenta la posibilidad de no-normalidad de éstos y (ii) explorar métodos de optimización por fuera de las fronteras tradicionales. En cuanto a futuros estudios, inicialmente se puede estudiar la reducción de dimensionalidad del mercado, por medio de clusters o análisis de componentes principales, para reducir el número de activos independientes a analizar. Adicionalmente, se puede explorar la construcción de cópulas diferentes a la cópula t y gaussiana, como la cópula hiperbólica generalizada. Finalmente, resulta conveniente explorar otras distribuciones marginales e incluir costos de transacción en la asignación de portafolios.

Por último, las principales limitaciones del estudio son la selección de activos del estudio, la cantidad de datos disponibles (principalmente opiniones de expertos) y supuestos fuertes, como curtosis y asimetría constante en el tiempo. Para solucionar este problema, trabajos futuros podrían incluir un universo más amplio, extendiéndose a distribuciones no-paramétricas para ajustar acciones poco observadas. Por otra parte, se asume que no existen costos de transacción, por lo que no se tiene en cuenta el costo de rebalancear portafolios. Esta limitación puede solucionarse utilizando metodologías

de optimización como la de Mitchell y Braum (2004)(12).

## References

- [1] Alonso, J. C., & Torres, G. (2014). *Características estadísticas del índice general de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) en sus primeros 10 años*. Journal of Economics, Finance and Administrative Science, 45-54.
- [2] Atmeh, M. A., & Dobbs, I. M. (2006). *Technical analysis and the stochastic properties of the Jordanian stock market index return*. Studies in Economic and Finance, 119-140.
- [3] Bolsa de Valores de Colombia, Disponible en <https://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc>, recuperado el 15 de marzo del 2016.
- [4] de Kort, J. (2007). *Modeling tail dependence using copulas — literature review*. Physica A, 89-115.
- [5] Eling, M. (2014). *Fitting asset returns to skewed distributions: Are the skew-normal and skew-student good models?*. Insurance: Mathematics and Economics, 45-56.
- [6] Gordon, M. J., & Shapiro, E. (1956). *Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit*. Management Science, 102-110.
- [7] Guidollin, M., Hyde, S., McMillan, D., & Ono, S. (2009). *Non-linear predictability in stock and bond returns: When and where is it exploitable*. Internal Journal of Forecasting, 373-399.
- [8] Humala, A., & Rodriguez, G. (2013). *Some stylized facts of return in the foreign exchange and stock markets in Peru*. Studies in Economics and Finance, 139-158.
- [9] Ko, K.-C., Lin, S.-J., Su, H.-J., & Chang, H.-H. (2014). *Value investing and technical analysis in Taiwan stock market*. Pacific-Basin Finance Journal, 14-36.
- [10] Ma, T., & R.A., S. (2014). *A model for stock returns and volatility*. Physica A, 89-115.
- [11] Meucci, A. (2009). *Risk and Asset Allocation*. Springer Finance.
- [12] Mitchell, J. & Braun S. (2004). *Rebalancing and Investment Portfolio in Presence of transaction costs*. Rensselaer Polytechnic Institute.
- [13] Perez J. & Mendoza J. C. (2010). *Efecto día en el mercado accionario colombiano: una aproximación no paramétrica*. Borradores de Economía, No 585, 1-18.
- [14] Rong, N., & Trück, S. (2010). *Returns of REITS and stock markets Measuring dependence and risk*. Journal of Property Investment and Finance, 34-57.
- [15] Salahi M., Mehrdoust F. & Piri F. (2013). *CVaR Robust Mean-CVaR Portfolio Optimization*. ISRN Applied Mathematics, No 2013, 1-9.
- [16] Sklar, A. (1959), *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris., 8: 229–231.
- [17] Vergara M.A. & Maya C.(2009). *Montecarlo estructurado. Estimación del valor en*

*riesgo en un portafolio accionario en Colombia.* Revista Universidad EAFIT, No. 15,68-88.

- [18] Wu, P.-C., Pan, S.-C., & Tai, X.-L. (2014). *Non-linearity, persistence and spillover effects in stock returns the role of the volatility index.* *Empirica*.
- [19] Yamamoto, R. (2012). *Intraday technical analysis of individual stocks on the Tokyo Stock Exchange.* *Journal of Banking and Finance*, 3033-3047.

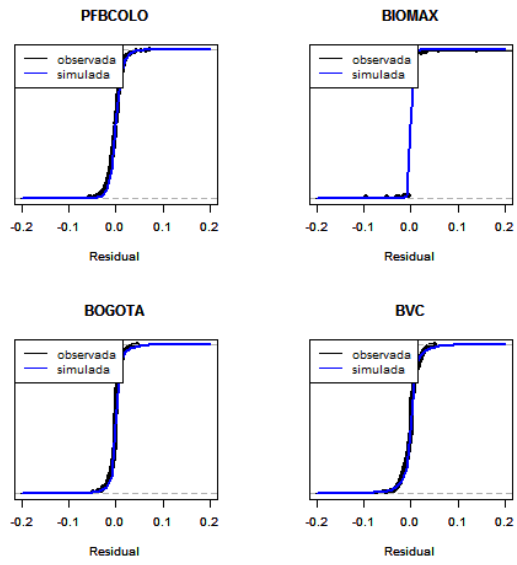


Figure 2: Distribuciones individuales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.



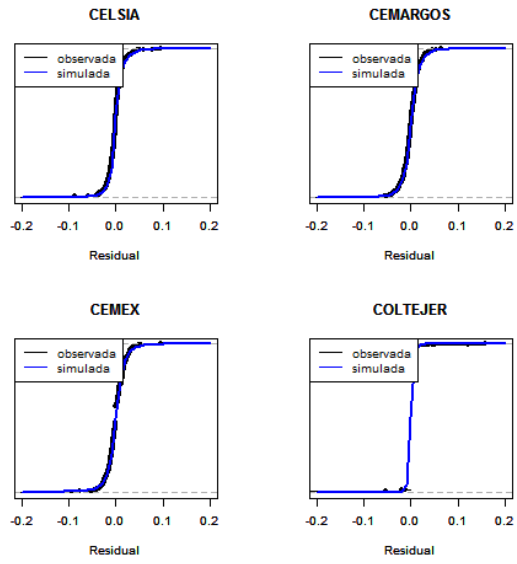


Figure 3: Distribuciones individuales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

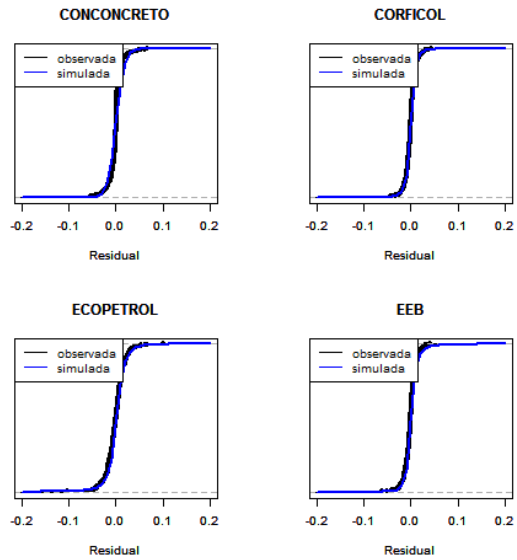


Figure 4: Distribuciones individuales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

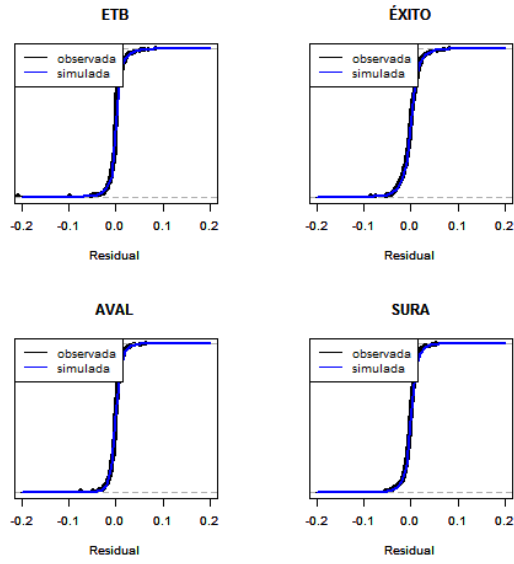


Figure 5: Distribuciones individuales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

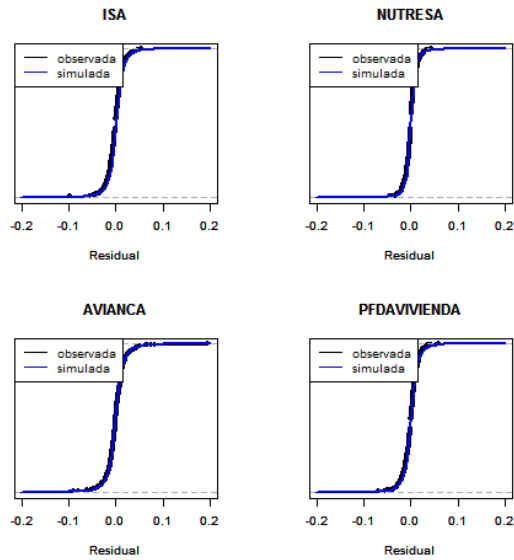


Figure 6: Distribuciones individuales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

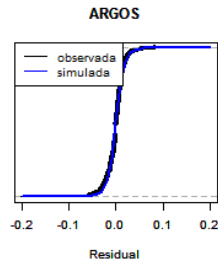


Figure 7: Distribuciones individuales. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

	RetTotal	RetPromedio	StdDev	VaR 5%	Sharpe
2009 - COLCAP	54.53	0.85	2.23	-2.48	0.38
2009 - CVaR - NN - BA	36.76	0.63	2.69	-2.37	0.23
2009 - Var - NN - BA	39.57	0.67	2.77	-2.14	0.24
2009 - Var - Nor - BA	32.83	0.58	2.93	-3.23	0.20
2010 - COLCAP	30.58	0.54	2.29	-1.55	0.24
2010 - CVaR - NN - BA	40.49	0.70	3.01	-2.58	0.23
2010 - Var - NN - BA	42.89	0.73	3.01	-2.58	0.24
2010 - Var - Nor - BA	41.09	0.70	2.67	-2.47	0.26
2011 - COLCAP	-10.38	-0.18	2.49	-2.73	-0.07
2011 - CVaR - NN - BA	-8.64	-0.13	3.05	-4.03	-0.04
2011 - Var - NN - BA	-6.97	-0.09	3.06	-3.72	-0.03
2011 - Var - Nor - BA	5.69	0.14	2.51	-2.95	0.05
2012 - COLCAP	11.88	0.23	1.96	-1.94	0.12
2012 - CVaR - NN - BA	7.98	0.19	2.89	-2.90	0.07
2012 - Var - NN - BA	1.59	0.07	2.88	-2.91	0.02
2012 - Var - Nor - BA	-1.33	0.02	2.97	-3.41	0.01
2013 - COLCAP	-12.55	-0.24	1.93	-1.98	-0.13
2013 - CVaR - NN - BA	1.50	0.05	1.93	-1.80	0.02
2013 - Var - NN - BA	-8.08	-0.14	2.06	-1.82	-0.07
2013 - Var - Nor - BA	-13.98	-0.27	2.04	-2.07	-0.13
2014 - COLCAP	-5.48	-0.07	2.68	-2.13	-0.03
2014 - CVaR - NN - BA	-4.79	-0.03	3.50	-3.30	-0.01
2014 - Var - NN - BA	-8.10	-0.10	3.50	-3.29	-0.03
2014 - Var - Nor - BA	-0.64	0.05	3.52	-3.26	0.01
2015 - COLCAP	-21.23	-0.41	2.94	-3.50	-0.14
2015 - CVaR - NN - BA	-10.98	-0.18	3.00	-3.22	-0.06
2015 - Var - NN - BA	-5.80	-0.07	3.08	-3.22	-0.02
2015 - Var - Nor - BA	-8.53	-0.12	3.01	-3.17	-0.04
2016 - COLCAP	24.69	0.44	1.84	-1.90	0.24
2016 - CVaR - NN - BA	19.56	0.37	2.31	-2.72	0.16
2016 - Var - NN - BA	19.98	0.38	2.28	-2.72	0.17
2016 - Var - Nor - BA	16.87	0.33	2.59	-2.73	0.13
2017 - COLCAP	-0.87	-0.22	0.62	-0.77	-0.35
2017 - CVaR - NN - BA	-11.40	-2.97	1.55	-4.33	-1.92
2017 - Var - NN - BA	-11.71	-3.06	1.56	-4.51	-1.96
2017 - Var - Nor - BA	-10.72	-2.79	1.08	-3.71	-2.58

Table 7: Resultados generales anuales, baja aversión. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

	RetTotal	RetPromedio	StdDev	VaR 5%	Sharpe
2009 - COLCAP	54.53	0.85	2.23	-2.48	0.38
2009 - CVaR - NN - MA	27.86	0.49	2.37	-2.36	0.21
2009 - Var - NN - MA	31.79	0.55	2.41	-2.08	0.23
2009 - Var - Nor - MA	29.48	0.52	2.58	-2.94	0.20
2010 - COLCAP	30.58	0.54	2.29	-1.55	0.24
2010 - CVaR - NN - MA	42.06	0.72	2.88	-2.53	0.25
2010 - Var - NN - MA	40.57	0.70	2.87	-2.58	0.24
2010 - Var - Nor - MA	33.97	0.59	2.50	-2.09	0.24
2011 - COLCAP	-10.38	-0.18	2.49	-2.73	-0.07
2011 - CVaR - NN - MA	-8.31	-0.12	2.98	-3.17	-0.04
2011 - Var - NN - MA	-8.52	-0.13	2.96	-3.28	-0.04
2011 - Var - Nor - MA	-5.11	-0.07	2.59	-3.39	-0.03
2012 - COLCAP	11.88	0.23	1.96	-1.94	0.12
2012 - CVaR - NN - MA	6.91	0.17	2.80	-2.67	0.06
2012 - Var - NN - MA	4.39	0.12	2.76	-2.62	0.04
2012 - Var - Nor - MA	-4.58	-0.05	2.95	-2.90	-0.02
2013 - COLCAP	-12.55	-0.24	1.93	-1.98	-0.13
2013 - CVaR - NN - MA	7.93	0.17	1.96	-1.74	0.09
2013 - Var - NN - MA	0.78	0.04	2.09	-1.74	0.02
2013 - Var - Nor - MA	-7.64	-0.13	2.05	-1.74	-0.07
2014 - COLCAP	-5.48	-0.07	2.68	-2.13	-0.03
2014 - CVaR - NN - MA	-7.14	-0.09	3.40	-3.29	-0.03
2014 - Var - NN - MA	-11.18	-0.17	3.40	-3.29	-0.05
2014 - Var - Nor - MA	-1.38	0.03	3.44	-2.94	0.01
2015 - COLCAP	-21.23	-0.41	2.94	-3.50	-0.14
2015 - CVaR - NN - MA	-3.89	-0.04	2.87	-3.11	-0.01
2015 - Var - NN - MA	-4.25	-0.04	2.88	-3.12	-0.01
2015 - Var - Nor - MA	-1.44	0.01	2.83	-3.15	0.00
2016 - COLCAP	24.69	0.44	1.84	-1.90	0.24
2016 - CVaR - NN - MA	18.57	0.35	2.22	-2.67	0.16
2016 - Var - NN - MA	18.90	0.36	2.16	-2.67	0.16
2016 - Var - Nor - MA	6.14	0.14	2.30	-2.80	0.06
2017 - COLCAP	-0.87	-0.22	0.62	-0.77	-0.35
2017 - CVaR - NN - MA	-9.38	-2.42	1.74	-3.50	-1.39
2017 - Var - NN - MA	-9.58	-2.48	1.54	-3.46	-1.61
2017 - Var - Nor - MA	-9.59	-2.48	1.51	-3.44	-1.64

Table 8: Resultados generales anuales, media aversión. Fuente: Reuters. Calculo del autor.

	RetTotal	RetPromedio	StdDev	VaR 5%	Sharpe
2009 - COLCAP	54.53	0.85	2.23	-2.48	0.38
2009 - CVaR - NN - AA	32.60	0.55	2.01	-1.93	0.28
2009 - Var - NN - AA	33.78	0.57	2.06	-1.94	0.28
2009 - Var - Nor - AA	38.26	0.64	2.19	-1.64	0.29
2010 - COLCAP	30.58	0.54	2.29	-1.55	0.24
2010 - CVaR - NN - AA	30.45	0.55	2.71	-2.64	0.20
2010 - Var - NN - AA	29.11	0.53	2.68	-2.53	0.20
2010 - Var - Nor - AA	30.45	0.55	2.66	-2.30	0.21
2011 - COLCAP	-10.38	-0.18	2.49	-2.73	-0.07
2011 - CVaR - NN - AA	-7.47	-0.11	2.85	-3.04	-0.04
2011 - Var - NN - AA	-8.62	-0.13	2.81	-3.02	-0.05
2011 - Var - Nor - AA	-11.44	-0.19	2.93	-4.03	-0.06
2012 - COLCAP	11.88	0.23	1.96	-1.94	0.12
2012 - CVaR - NN - AA	14.76	0.30	2.65	-2.00	0.11
2012 - Var - NN - AA	11.89	0.25	2.68	-2.33	0.09
2012 - Var - Nor - AA	10.77	0.23	2.59	-2.39	0.09
2013 - COLCAP	-12.55	-0.24	1.93	-1.98	-0.13
2013 - CVaR - NN - AA	2.81	0.07	2.00	-2.10	0.04
2013 - Var - NN - AA	-0.54	0.01	2.14	-2.44	0.01
2013 - Var - Nor - AA	-3.85	-0.06	1.86	-1.74	-0.03
2014 - COLCAP	-5.48	-0.07	2.68	-2.13	-0.03
2014 - CVaR - NN - AA	-3.83	-0.02	3.26	-3.21	-0.01
2014 - Var - NN - AA	-3.11	-0.01	3.24	-3.20	-0.00
2014 - Var - Nor - AA	4.27	0.14	3.41	-2.94	0.04
2015 - COLCAP	-21.23	-0.41	2.94	-3.50	-0.14
2015 - CVaR - NN - AA	5.86	0.15	2.87	-3.09	0.05
2015 - Var - NN - AA	6.81	0.16	2.84	-2.85	0.06
2015 - Var - Nor - AA	8.40	0.19	2.74	-2.71	0.07
2016 - COLCAP	24.69	0.44	1.84	-1.90	0.24
2016 - CVaR - NN - AA	12.61	0.25	2.07	-2.73	0.12
2016 - Var - NN - AA	12.91	0.25	2.05	-2.69	0.12
2016 - Var - Nor - AA	4.22	0.10	2.20	-2.80	0.05
2017 - COLCAP	-0.87	-0.22	0.62	-0.77	-0.35
2017 - CVaR - NN - AA	-7.44	-1.90	2.02	-3.58	-0.94
2017 - Var - NN - AA	-7.52	-1.92	1.96	-3.57	-0.98
2017 - Var - Nor - AA	-7.59	-1.94	2.06	-3.75	-0.94

Table 9: Resultados generales anuales, alta aversión. Fuente: Reuters. Calculo del autor.