

# Manipulación de pronósticos

Francisco Barreras

27 de agosto de 2015

# ¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

# Abrebocas

- ▶ Todo el tiempo estamos escuchando a **expertos** haciendo **pronósticos**.
- ▶ Expertos sobre el clima, sobre el precio del dólar, sobre eventos astronómicos...
- ▶ Normalmente **sólo** tenemos las **predicciones** de los expertos, y luego observamos los **eventos**.
- ▶ ¿Esto es **suficiente** para saber si es un **verdadero experto**?



# ¿Qué es la manipulación de pronósticos?

- ▶ **Alice**, una tomadora de decisiones necesita información de un experto pronosticador, **Bob**.
- ▶ **Bob** realiza predicciones sobre la ocurrencia de un evento. Por ejemplo 1 o 0:

$$(1, 0, 0, 1, \dots) \quad (1)$$

- ▶ Las predicciones determinísticas son fáciles de falsear, sin embargo Bob puede predecir **la probabilidad** de 1 en cada evento.
- ▶ A **Alice** le interesa testear a **Bob**, para saber si realmente conoce la distribución de los datos. Sólo puede hacerlo comparando **las predicciones** con los **eventos observados**.

# El juego

Todo esto se puede presentar en un marco de teoría de juegos.

- ▶ Alice y Bob juegan un juego de manera secuencial. Primero juega Alice y luego juega Bob.
- ▶ Para poder testear a Bob, Alice diseña un test y esa es su estrategia en el momento 0.
- ▶ Bob, sabiendo que lo van a testear quiere pasar el test. Entonces entrega una teoría en el periodo 1, **conociendo el test de Alice.**
- ▶ Después la naturaleza despliega los eventos de acuerdo al verdadero proceso estocástico y se decide si Bob pasa o no pasa el test.

# Otro juego

Otra manera de verlo es como un juego entre Bob y la naturaleza. Dado que lo que nos interesa es el caso en que Bob ignorantemente pasa el test, queremos ver que gane **casi siempre**, sin importar lo que le bote **la naturaleza**.

- ▶ El test está dado y hace parte del diseño del juego.
- ▶ Bob y la naturaleza juegan simultáneamente.
- ▶ Bob juega dando una teoría.
- ▶ La naturaleza juega dando una sucesión de observaciones **tratando de rajar a Bob**.
- ▶ Bob gana **si pasa el test**, de lo contrario gana la naturaleza.

¿Qué es la  
manipulación de  
pronósticos y como  
funciona?

## Motivación

El modelo

Manipulación

Resultados al  
respecto

Resolviendo la  
contradicción

# Motivación

- ▶ Los modelos económicos se apoyan en parámetros desconocidos, muchas veces estocásticos.
- ▶ Se necesita verificar si los expertos que proveen dichos parámetros conocen la verdad. ¿Cómo hacerlo?
- ▶ La información observada empíricamente puede no falsear teorías falsas. **Esto es un problema.**
- ▶ Queremos mecanismos que nos permitan filtrar a los verdaderos expertos. Sería un aporte a la teoría.

## Pregunta de investigación:

¿Existe un juego, tipo Sandroni, que permita **separar** a los expertos de los no expertos? ¿O por lo menos que permita **conocer la teoría** que genuinamente genera los datos en un escenario entre posibles expertos y tomadores de decisiones?





# Teorías no falseables

- ▶ La gente enana ve las cosas más pequeñas que la gente de estatura normal.
- ▶ Existe un ser humano con libre albedrío.
- ▶ Existe algo más que el universo observable.
- ▶ El universo entero fue creado hace 5 minutos, en el estado en que parecía estar hace 5 minutos.
- ▶ y aparentemente...

**Los pronósticos de un experto basados en información pasada corresponden al verdadero proceso generador de datos.**

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

**El modelo**

Manipulación

Resultados al respecto

Resolviendo la contradicción

# El modelo

# El espacio

Como se mencionó anteriormente, el espacio sobre el que se observan los eventos y se hacen las predicciones es el de las secuencias en  $\{0, 1\}^\infty$ . Las sucesiones infinitas de 0 y 1. El modelo requiere algo de formalidad:

## Formalmente

- ▶ Sea  $\Omega = \{0, 1\}^\infty$  el conjunto de todos los caminos de realizaciones de eventos. Denotamos un camino como  $s \in \Omega$ .
- ▶ Una historia finita es  $s_t \in \{0, 1\}^t$ . Tomamos  $s_0 \in \{0, 1\}$  como dado y definimos  $\{0, 1\}^0 = s_0$ .
- ▶ Definimos un cilindro  $C(s_t)$  con base (finita)  $s_t$  como el conjunto  $C(s_t) = \{s \in \Omega : s|_t = s_t\}$ .
- ▶ Los cilindros generan una sigma álgebra sobre la que podemos definir probabilidades.

Las teorías son probabilidades sobre ese espacio (dotado de esa sigma-álgebra) pero se pueden ver como la probabilidad de un evento (0 o 1) dada la historia. **Una teoría incluye las probabilidades de todas las historias** no solamente la historia realizada.

## Formalmente

- ▶ Una teoría es cualquier  $P \in \Delta(\Omega)$ .
- ▶ (Kolmogorov) De manera equivalente, una teoría es una función  $f : \bigcup_{t \geq 0} \{0, 1\}^t \rightarrow [0, 1]$  ( $f$  toma una historia finita y devuelve la probabilidad de 1 para el siguiente periodo).

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

El modelo

Manipulación

Resultados al respecto

Resolviendo la contradicción

## Propiedades de teorías

- ▶ Las Teorías  $P$  y  $Q$  son equivalentes sobre  $s \in \Omega$  si  $f^P(s_t) = f^Q(s_t)$  para todo  $t$ . Decimos que son equivalentes hasta el periodo  $t$ , si para todas las historias finitas  $s_{t'}$ ,  $t' \leq t$ , tenemos que  $f^P(s_{t'}) = f^Q(s_{t'})$ .
- ▶ En la versión de teoría de juegos,  $P \in \Delta(\Omega)$  es una estrategia pura, la solución puede venir de randomizar. Una estrategia mixta es una randomización de teorías en  $\Delta\Delta(\Omega)$

Básicamente de las teorías sólo nos importa lo que predigan, si predicen lo mismo, se consideran equivalentes. Permitir que Bob **randomice** es clave para usar **teoremas de teoría de juegos**.

# Un ejemplo de una teoría

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

El modelo

Manipulación

Resultados al respecto

Resolviendo la contradicción

$$P(0|s_0) = 0,5 \quad (2)$$

$$P(1|s_0) = 0,5 \quad (3)$$

$$P(0|s_1 = (0)) = 0,3 \quad (4)$$

$$P(1|s_1 = (0)) = 0,7 \quad (5)$$

$$P(0|s_1 = (1)) = 0,4 \quad (6)$$

$$P(1|s_1 = (1)) = 0,6 \quad (7)$$

$$\dots \quad (8)$$

$$P(1|s_n = (0, 1, \dots, 1)) = x \quad (9)$$

$$(10)$$

\* Debe proporcionar todas las probabilidades, incluso las de eventos no realizados.

Sería suficiente con proporcionar las probabilidades de cada uno de los cilindros de base finita...

$$P(C(s_1)) = 0,5 \quad (11)$$

$$P(C(s_2)) = 0,5 \quad (12)$$

$$P(C(s_3)) = 0,3 \quad (13)$$

$$\dots \quad (14)$$

$$P(C(s_r)) = x \quad (15)$$

$$(16)$$

\* ¿El conjunto de los cilindros de base finita es contable?

# El espacio es incontable

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

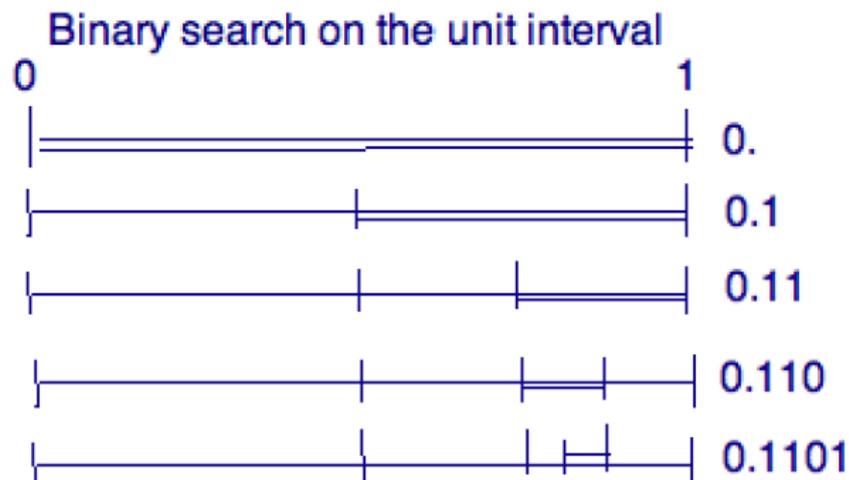
Motivación

El modelo

Manipulación

Resultados al respecto

Resolviendo la contradicción



El concepto de un test que acepta o rechaza una teoría **sin conocer la verdadera teoría** no es trivial. El test funciona como una **prueba de hipótesis**. Para cada teoría, nos da un conjunto de observaciones que es **inconsistente** y con el que **se rechaza**.

## Formalmente

- ▶ Un test es una función  $T : \Delta(\Omega) \rightarrow \Omega$ . Que asigna a cada teoría un conjunto de aceptación.
- ▶ Si  $s \in T(P)$  decimos que el test  $T$  **acepta** la teoría  $P$  basado en el camino  $s$ . Cuando  $s \notin T(P)$  decimos que el test **rechaza** la teoría  $P$  basado en el camino  $s$ .
- ▶ Para una teoría  $P \in \Delta(\Omega)$  definimos  $A_P = T(P)$  como el **conjunto de aceptación**. Suponemos que este conjunto es medible.

## Propiedades de Tests

- ▶ Un test  $T$  es **precuencial** si para dos teorías equivalentes  $P, Q$  sobre  $s$ , se tiene  $T(s, P) = 0 \iff T(s, Q) = 0$ .
- ▶ En el caso en que  $s$  sea **el camino realizado**, el test precuencial acepta o rechaza una teoría **basado solo** en ese camino realizado.
- ▶ Un test es **futuro independiente** si siempre que rechace una teoría  $P$  basado en una historia finita  $s_t$  entonces **rechaza cualquier otra** teoría que sea **equivalente** a  $P$  hasta el periodo  $t$ .
- ▶ El conjunto de aceptación de una teoría  $P$  es  $T(P)$ . Decimos que un test **acepta la verdad** con probabilidad  $1 - \varepsilon$  si  $P(T(P)) > 1 - \varepsilon$ .

Puede verse como si toda teoría tuviera la **oportunidad** de ser la correcta.

- ▶ Los resultados muestran que cuando los tests aceptan las teorías verdaderas, pueden ser pasados por falsos expertos que pronostiquen estratégicamente.
- ▶ Algunos resultados prometedores muestran que dándoles incentivos a los expertos, se puede lograr que los verdaderos expertos revelen su verdadera teoría y los falsos expertos **no hagan daño**.
- ▶ Cuando hay **múltiples expertos** se cuenta con más información y hay más tests disponibles.
- ▶ **¿Se puede diseñar un mecanismo o juego para múltiples expertos que incentive decir la verdad cuando se es verdadero experto y permita distinguir a los falsos expertos?**

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

El modelo

**Manipulación**

Resultados al respecto

Resolviendo la contradicción

# Manipulación

# ¿Cómo se hace un test?

- ▶ Si uno solo cuenta con las predicciones y las observaciones, pues quiere testear que coincidan, más o menos.
- ▶ Existe un test de **calibración** que captura esa idea.
- ▶ Evalúa si la proporción de días donde se predijo el evento con probabilidad **p** que tuvieron el evento, converge a **p**.
- ▶ Lastimosamente, este fue de los primeros tests que se demostraron manipulables (Foster y Vohra 1997)
- ▶ ¿Cómo se vería un test distinto al de calibración?  
¿Cómo se ve un test no manipulable?

# Ejemplo de un test precuencial

Para una teoría  $P$  y un camino observado  $s$ :

$$s \in T(P) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (f_{t-1}^P(s) - I_t(s)) = 0$$

El término  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_{t-1}^P(s)$  es el pronóstico medio de 1 en  $S_{t-1}$ .

El término  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n I_t(s)$  es la frecuencia empírica de 1 en  $S_t$ .

## Observación

Este R-test es precuencial. Además no rechaza la verdad, por ende es manipulable.

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

El modelo

Manipulación

Resultados al respecto

Resolviendo la contradicción

- ▶ Bob puede pasar ignorantemente el R-test si usa la siguiente teoría:

$$f(s_t) = 1 \text{SIR}(f, s_{t-1}) < 0 \quad (17)$$

$$f(s_t) = 0,5 \text{SIR}(f, s_{t-1}) = 0 \quad (18)$$

$$f(s_t) = 0 \text{SIR}(f, s_{t-1}) > 0 \quad (19)$$

$$(20)$$

- ▶ De esta forma, el puntaje en el que se basa el test siempre se acerca a 0 (**¿Por qué?**)
- ▶ Parece un test muy débil. Pero todos los tests precuenciales lo son. (Sandroni, 2008)

# Ejemplo de un test no precuencial

Sea  $S = (s^1, s^2, \dots)$  un subconjunto contable denso de  $\Omega$ . Para un  $k$ , se tiene que para cada elemento de labase  $s^i$ , existe un  $t$  tal que:

$$P(C(s_t^i) - \{s^i\}) \leq \frac{1}{2^{k+i}}$$

El test de categoría global es:

$$s \notin T(P) \text{ si } s \notin S \text{ and } s \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} C(s_{t(i,k,P)}^i)$$

## observaciones

Este test depende de información no observada. Sandroni mostró que es no manipulable.

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

El modelo

Manipulación

**Resultados al respecto**

Resolviendo la contradicción

## Resultados al respecto

- ▶ Cualquier test futuro independiente que acepte la verdad con probabilidad  $1 - \epsilon$  puede ser pasado ignorantemente con probabilidad  $1 - \epsilon - \delta$  para  $\delta$  arbitrariamente pequeño (Sandroni, 2008).
- ▶ Sandroni reformula el problema como **un juego** de suma cero donde Bob tiene una estrategia no perdedora randomizando. Usa el teorema de Min-Max.
- ▶ Es un resultado negativo, pues muestra que casi siempre se puede manipular cualquier test futuro independiente.

En otro trabajo, Sandroni (2014) muestra que si el tomador de decisiones tiene una hipótesis inicial, se puede diseñar un sistema de incentivos que permite:

1. Dar incentivos a los verdaderos expertos para revelar la información correcta.
2. Dar incentivos a los falsos expertos para que digan la hipótesis inicial del tomador de decisiones.

Este sistema se conoce como un contrato "tipo Sandroni".

## Observación

Este resultado parece contradecir el anterior, pero es en verdad más débil, y requiere que exista una hipótesis inicial que esté dentro de un conjunto restringido.

# Multiple Experts

Mi trabajo se centra en el caso de múltiples expertos, usando una metodología similar a las anteriores. Aunque hay literatura de **múltiples expertos**, esta no tiene el resultado que buscamos.

- ▶ Si el tomador de decisiones evalúa **múltiples expertos al mismo tiempo**, puede hacer un test *future independent* (El cross-calibration test), **condicionando a las predicciones de los otros** que es no manipulable salvo en un conjunto de **Categoría I** (Feinberg, 2008).
- ▶ (Olszewsky y Sandroni, 2008) Múltiples falsos expertos, pueden producir **de manera independiente** teorías que pasen simultáneamente un test futuro independiente si pueden randomizar entre sus teorías.

¿Qué es la manipulación de pronósticos y como funciona?

Motivación

El modelo

Manipulación

Resultados al respecto

**Resolviendo la contradicción**

# Resolviendo la contradicción

# Resultados del primer paper de Sandroni

- ▶ Todo test precuencial que acepte la verdad con probabilidad  $1 - \varepsilon$ , **puede ser pasado ignorantemente** con probabilidad  $1 - \varepsilon - \delta$  para  $\delta$  arbitrario.
- ▶ No habla de casos donde haya **0 error tipo I**.
- ▶ En el **peor escenario posible**, el falso experto no puede manipular el test.
- ▶ Son juegos que se pueden acabar en **tiempo finito**. En particular, los tests son **precuenciales**.

# Supuestos del segundo paper

- ▶ Un **scoring–rule** es un puntaje que se le asigna a las predicciones de acuerdo a los datos observados:

$$V : S \times \Delta(S) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (21)$$

- ▶ Note que depende de **todo el camino**. **No es precuencial**.
- ▶ Se diseña un juego, donde Bob puede dar una teoría y recibir pagos de acuerdo a un scoring–rule predeterminado.
- ▶ Alice proporciona una hipótesis inicial  $P_*$  que debe estar dentro de un subconjunto cerrado y convexo de las teorías  $\Theta_B$  que son las **teorías concebibles** por Bob.
- ▶ Si Bob no está informado del verdadero proceso generador de datos, optimiza de acuerdo a un criterio de **maximin** o **peor escenario posible**.

# Resultados del segundo paper

- ▶ Existe un contrato que hace que los verdaderos expertos revelen la verdadera teoría.
- ▶ Y además hace que los falsos expertos prefieran jugar el "prior", suponiendo el peor escenario posible.
- ▶ De cierta forma, Alice sabe quien es el verdadero experto, pues sabe que los falsos jugarían su "prior" (en el peor escenario posible).
- ▶ La solución es inventar un nuevo scoring-rule partiendo de cualquiera:

$$\hat{V}(p, s) = V(p, s) - V(p^*, s) + \varepsilon \quad (22)$$