cobertura global y de orden superior

ricardo pachón cortés
credit suisse

en esta charla

(1) cobertura dinámica

(2) cobertura global y de orden superior: ¿qué es?

(3) cobertura global y de orden superior: ¿cómo se construye?

cobertura dinámica

Black-Scholes [1973], Merton [1973]

el precio de un derivado $V(S,t)$ sobre un activo subyacente $S(t)$ satisface la siguiente EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

donde r es la tasa de interés sin riesgo

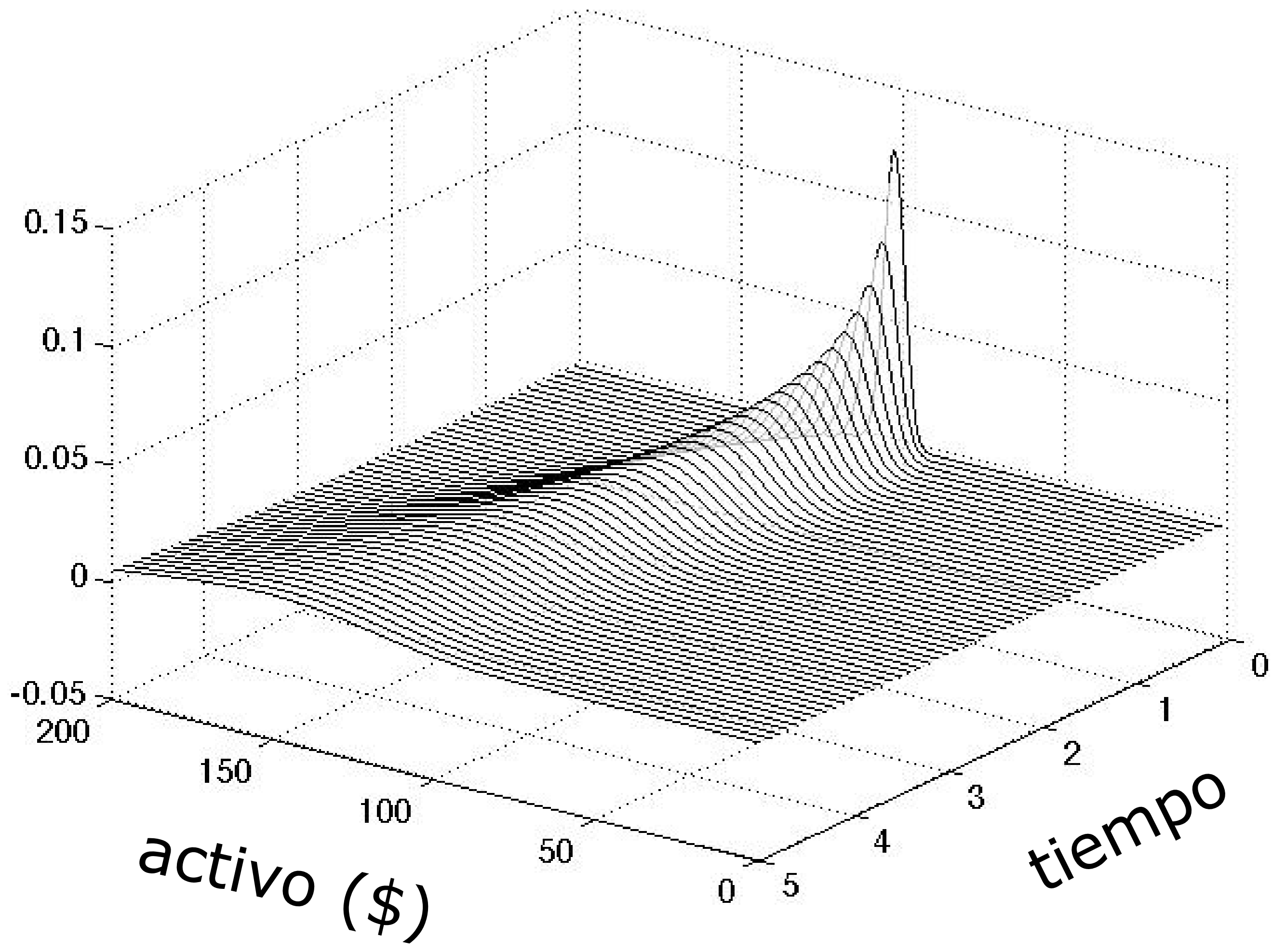
un supuesto (de muchos otros)

$S(t)$ evoluciona de acuerdo a un movimiento Browniano geométrico con tendencia μ y volatilidad σ:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

donde W(t) es un proceso de Wiener

evolución de la función de densidad de probabilidad



Black-Scholes [1973], Merton [1973]

1. por el lema de Itō, si $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, entonces

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW$$

2. construya el portafolio $\Pi(t) = V(t) + \delta S(t)$, i.e., una opción y δ acciones

3. asuma que el portafolio se auto-financia, i.e., $d\Pi = dV + \delta dS$, por lo tanto

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S \delta \right) dW$$

4. si la cantidad de acciones es $\delta = \partial V / \partial S$, entonces elimine la aleatoriedad

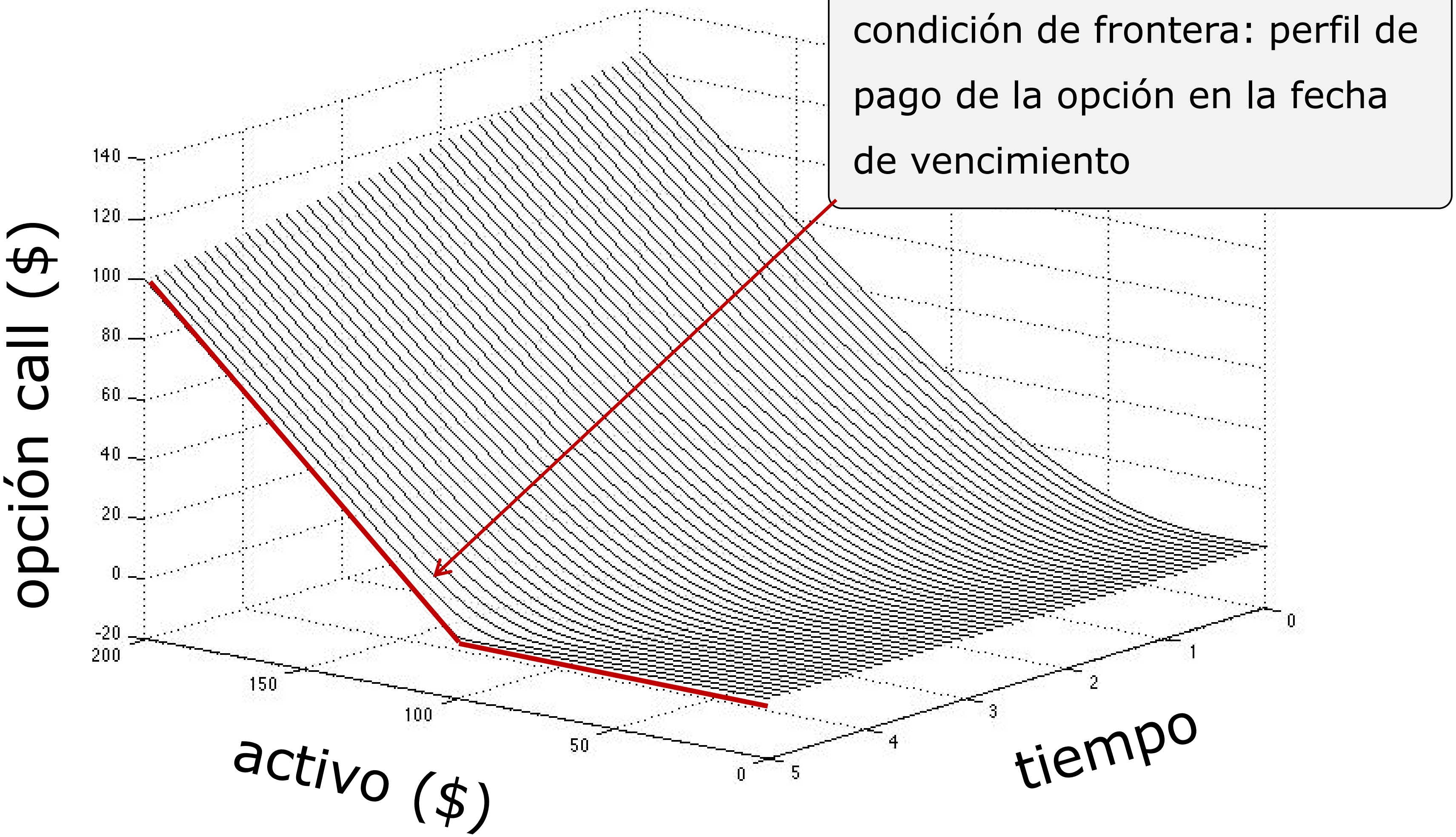
$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt$$

5. portafolio no tiene riesgo, por lo tanto su rendimiento debe ser dado por la tasa de interés sin riesgo r, $d\Pi = r\Pi dt$, de lo que sigue

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

evolución del precio opción call

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$



más que un supuesto es una receta:
cobertura dinámica ("dynamic hedging")

cobertura: posición que cancela el efecto de las fluctuaciones del activo sobre el derivado objetivo

$$\underbrace{a_1 H_1(\Delta S, \Delta t) + a_2 H_2(\Delta S, \Delta t) + \cdots + a_m H_m(\Delta S, \Delta t)}_{\text{cobertura}} = \underbrace{V(\Delta S, \Delta t)}_{\text{derivado objetivo}}$$

"…si la cantidad de acciones es $\delta = \partial V / \partial S$, entonces elimine la aleatoriedad…"

$H = S$: tomar una posicion en el activo…

$a = [\partial V / \partial S]_{S(t),t}$: …que cancela la componente lineal demostración: cobertura dinámica

cobertura global y de orden superior:

¿qué es?

idea

sustituir aproximaciones

locales y de bajo orden

por aproximaciones

globales y de orden superior

cobertura de orden superior: ¿qué es?

1. usar derivados para cubrir otros derivados
2. la cobertura es estática (no dinámica)
3. la cobertura aproxima el comportamiento del derivado desde el inicio hasta el vencimiento
4. el máximo error de la aproximación se conoce de antemano

demostración: cobertura de orden superior cobertura global y de orden superior:

¿cómo se construye?

dados
(tal vez
complejos)

$$\boldsymbol{x} = \overbrace{[x_0, \dots, x_n]}^{\text{diferentes}}{}^T$$

$$\boldsymbol{f} = [f_0, \dots, f_n]^T$$

polinomios interpolantes: definición

$$p(x) \in P(n)$$

$$p(x_j) = f_j, \qquad j = 0, \dots, n$$

polinomios interpolantes: construcción

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underbrace{\phi_j}_{\{\phi_j\}:\ \text{base para } P(n)}(x),$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \phi_0(\boldsymbol{x}) & \dots & \phi_n(\boldsymbol{x}) \end{array} \right)}_{\text{matriz de tipo Vandermonde de tamaño } (n+1)\times(n+1)} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

esquemas interpolantes

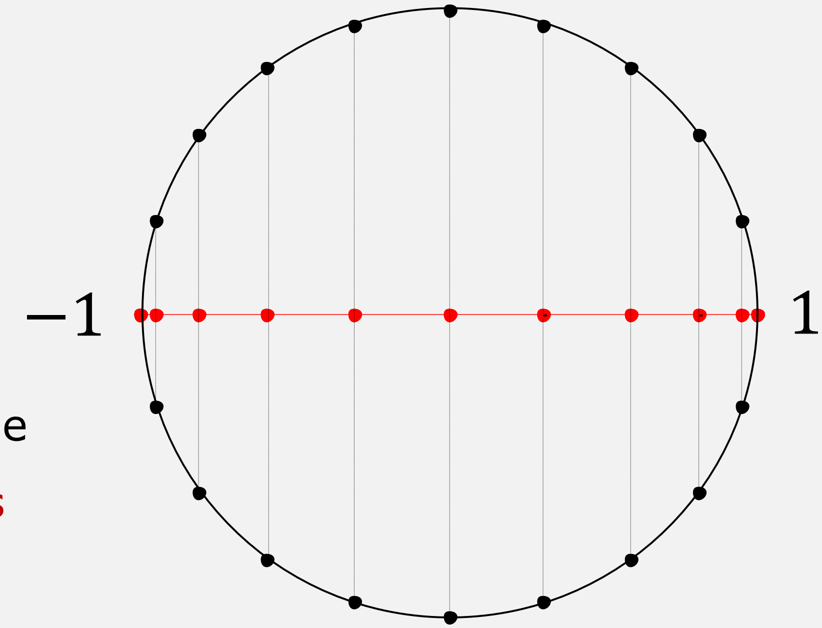
$$
\begin{array}{cccccc}
x_0^{(0)} & & & & & \\
x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & & \\
x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

definición de la malla de $n+1$ puntos, e.g., puntos equidistantes en $[-1,1]$

$$x_j^{(n)} = -1 + \frac{2j}{n}, j = 0, \dots, n$$

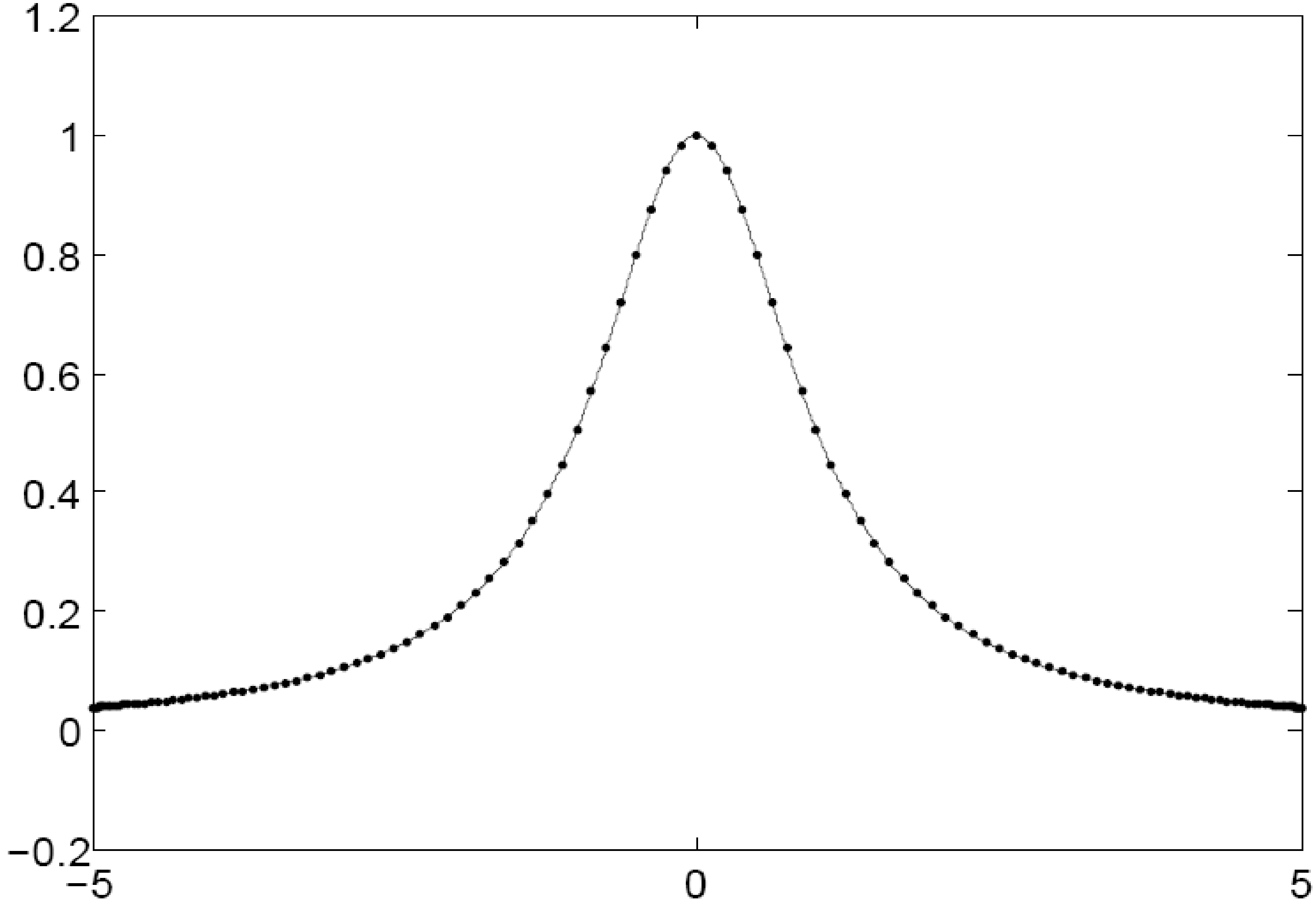
una buena malla: nodos de Chebyshev

$$x_k = -\cos\frac{k\pi}{n}, k = 0, \ldots, n$$



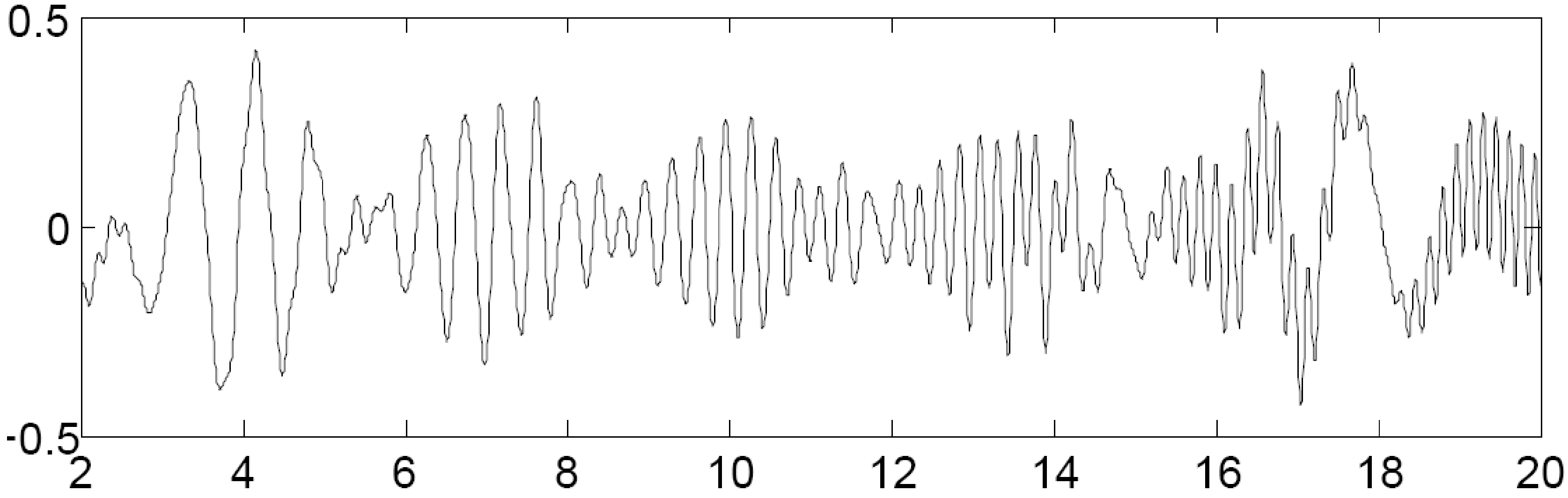
proyecciones de las raices n-esimas de la unidad (los nodos quedan apiñados hacia los extremos)

$||f - p_{183}|| \approx$ precisión de máquina



$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

$||f - p_{492}||$ ≈ precisión de máquina



$$f(x) = \sin(x^2) J_0(x) + \sin(x)\, J_1\big((20-x)^2\big)$$

conexión con series de Chebyshev

teorema: si f es una función Lipschitz continua en $[-1,1]$ entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k T_k(x) \quad \text{con coeficientes} \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

donde $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ es el *polinomio de Chebyshev de primer tipo* de grado k

$$\tilde{f}(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' \tilde{c}_k T_k(x)$$

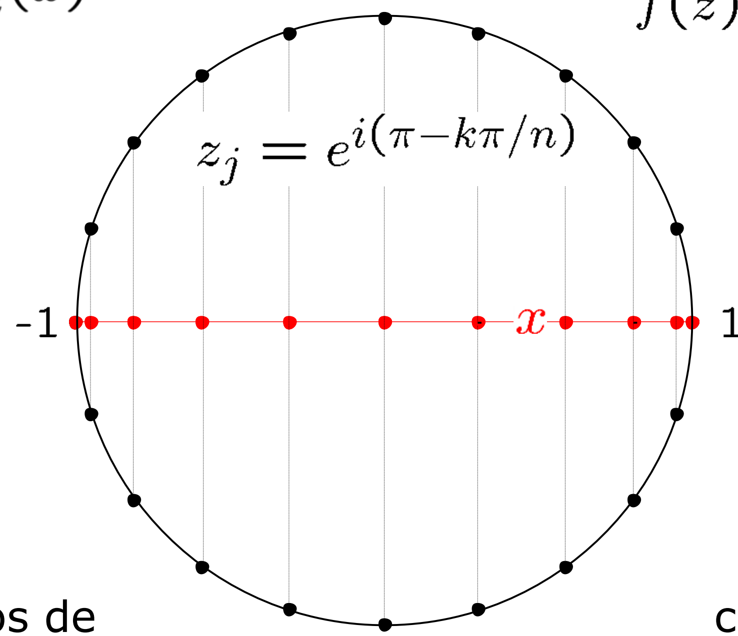
Chebyshev

$$x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

$$|z| = 1$$

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \tilde{c}_k (z^k + z^{-k})$$

Laurent



interpolación en puntos de Chebyshev $x_k = \cos(k\pi/n)$

coeficientes se obtienen de resolver un sistema de Vandermone (FFT)

$$x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

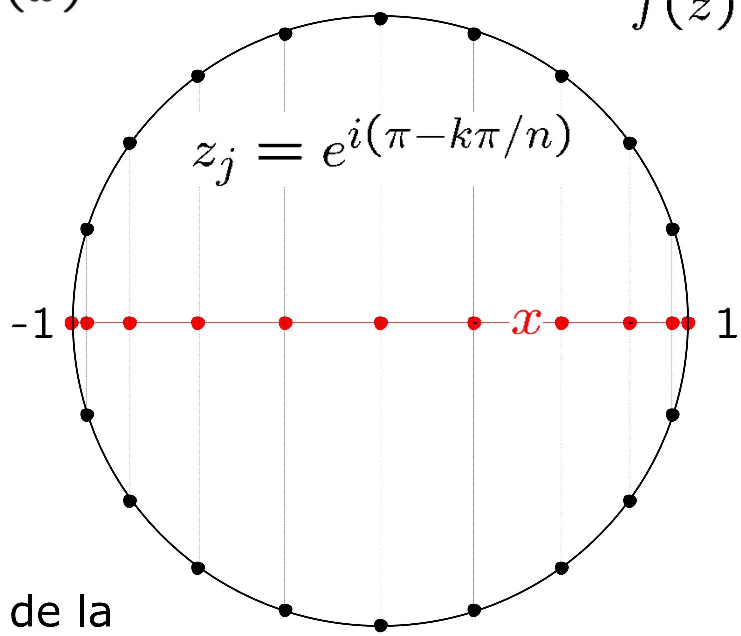
$$|z| = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' \tilde{c}_k T_k(x)$$

Chebyshev

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \tilde{c}_k (z^k + z^{-k})$$

Laurent



obtiene los valores de la función en puntos de Chebyshev (iFFT)

coeficientes de Chebyshev

www.chebfun.org

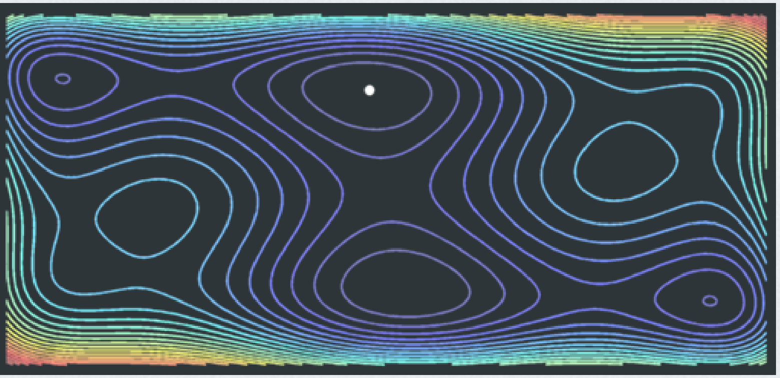
About News Download Docs Examples Support

Chebfun — numerical computing with functions

Chebfun is an open-source package for computing with functions to 15-digit accuracy. Most Chebfun commands are overloads of familiar MATLAB commands — for example `sum(f)` computes an integral, `roots(f)` finds zeros, and `u = L\f` solves a differential equation.

DOWNLOAD V5 BROWSE SOURCE

```
% The Dixon-Szego function
f = @(x,y) (4-2.1*x.^2+ x.^4/3).*x.^2 ...
           + x.*y + 4*(y.^2-1).*y.^2;
% Create a chebfun2
F = chebfun2(f, [-2,2,-1.25,1.25]);
% Find the minimum and mark it
[minf,minx] = min2(F);
contour(F,30), hold on
plot(minx(1),minx(2),'.w')
```



cobertura de orden superior:
¿cómo se construye?

1. descomponga el pago del derivado objetivo $V(S,T)$ en series de Chebyshev

$$V(S,T) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(S)\,, \qquad S \in [a,b]$$

2. descomponga el pago de los m+1 derivados de cobertura $\{H_i(S,T)\}$ en series de Chebyshev

$$H_i(S,T) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} T_j(S)\,, \qquad i = 0,\dots,m, \qquad S \in [a,b]$$

3. encuentre los pesos $\{a_i\}$ de tal manera que

$$\underbrace{a_0 h_{0,j} + a_1 h_{1,j} + \cdots + a_m h_{m,j}}_{\text{coeficiente } k \text{ de la cobertura}} \approx \underbrace{c_j}_{\text{coeficiente } k \text{ del derivado objetivo}}, \qquad j = 0,\dots,m$$

cobertura de orden superior: coeficientes de opciones call

el pago en la fecha de vencimiento de una call con strike $k_i \in [a, b]$, sobre una activo $S \in [a, b]$ se puede descomponer como $\max(0, S - k_i) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} T_j(S)$, donde

$$h_{i,0} = \frac{b-a}{2\pi}\left(\sqrt{1 - k_i'^2} - k_i' \arccos k_i'\right)$$

k_i': k_i transformado linealmente a $[-1,1]$

$$h_{i,1} = \frac{b-a}{2\pi}\left(\arccos k_i' - k_i'\sqrt{1 - k_i'^2}\right)$$

$$U_j(x) = \frac{\sin((j+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

$$h_{i,j} = \frac{(b-a)\sqrt{1 - k_i'^2}}{\pi}\left(\frac{k_i'}{j(j^2-1)} U_{j-1}(k_i') - \frac{1}{j^2-1} T_j(k_i')\right), \qquad j \geq 2$$

cobertura de orden superior:
sistema lineal de máximo contacto

coeficientes del derivado objetivo obtenidos mediante interpolación de Chebyshev

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{h_0} & \boldsymbol{h_1} & \cdots & \boldsymbol{h_m} \end{array}\right]}_{M \geq m \text{ coeficientes}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$$

mínimos cuadrados

$$\boldsymbol{h_i} = \left[h_{i,0}, h_{i,1}, \dots, h_{i,M}\right]^T$$

cobertura de orden superior: consideraciones finales

1. el error de la cobertura se mantiene acotado para cambios bruscos del precio del activo o saltos en la volatilidad (¡consecuencia de la difusión!)
2. la cobertura tiene la misma fecha de vencimiento que el derivado objetivo (y es para esa fecha donde se busca el máximo contacto)
3. se pueden establecer estrategias semi-estáticas, en las que la cobertura y el derivado tienen máximo contacto para una fecha previa (pros: el perfil es más suave y series convergen rápidamente; cons: ¿depende del modelo?)

cobertura de orden superior:
consideraciones finales

4. en general, el pago del derivado objetivo debe ser:

- ❑ ~~de tipo Europeo~~ barreras, tal vez Americanas?
- ❑ ~~continuo~~ discontinuas, aprox. de Padé?
- ❑ ~~acotado (con caps/floors)~~ mapeo a $[0,\infty)$? Laguerre?
- ❑ sobre un sólo activo subyacente

5. la cobertura no es única: ¿cómo seleccionar los derivados de cobertura? ¿buscar minimizar costos? ¿minimizar el error?

ricardo.pachon@credit-suisse.com