quantil

Dominancia estocástica

Daniel Rojas

10 de diciembre de 2015

Contenido

Definiciones

- ¿Qué es el riesgo?
- ¿Qué quiere decir una 'inversión riesgosa'?
- ¿Cómo se mide el riesgo?

Definiciones

Libre de riesgo:

- Una inversión es libre de riesgo, si tiene un retorno seguro.
- Formalmente una inversión X es libre de riesgo si $\mathbb{P}(X(1) = k) = 1$.
- Se suele pensar en deuda emitida por gobiernos estables (e.g. EEUU) o en depósitos bancarios (e.g. CDTs), como activos libres de riesgo.

Medidas de riesgo

- Domar and Musgrave risk index:

$$RI = -\int_{x \leq 0} f(x) x dx$$

- Varianza

$$\sigma_x^2 = \int f(x) \left(x - \mathbb{E}[x]\right)^2 dx$$

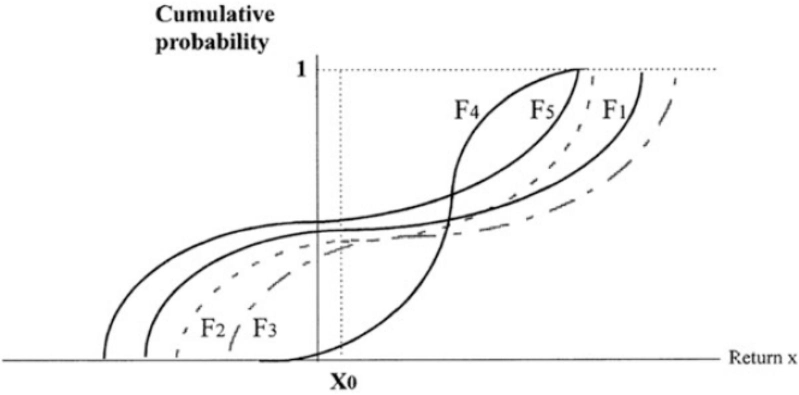
- Semi-varianza

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\mathbb{E}[x]} f(x) \left(x - \mathbb{E}[x]\right)^2 dx$$

Dominancia de primer orden

- Sean X y Y dos variables aleatorias con funciones de distribución F, G respectivamente. Entonces X domina a Y estocásticamente en primer orden (FSD), si y solo si $F(.) \leq G(.)$, y se denota $X \succeq_1 Y$.
- Intuitivamente, $F(.)$ le da más probabilidad a valores más grandes.

Dominancia de primer orden



F_3 domina a F_2.

FSD: ejemplo

Investment F_1		Investment F_2		Investment F_3	
X	P(x)	X	P(x)	x	P(x)
–10 %	1/2	–5 %	1/4	–5 %	1/5
30 %	1/2	0 %	1/4	2 %	1/5
		10 %	1/4	15 %	1/5
		40 %	1/4	40 %	2/5
Expected value					
10		$\frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$		$\frac{92}{5} = 18\frac{2}{5}$	

FSD: ejemplo

Funciones de probabilidad acumulada

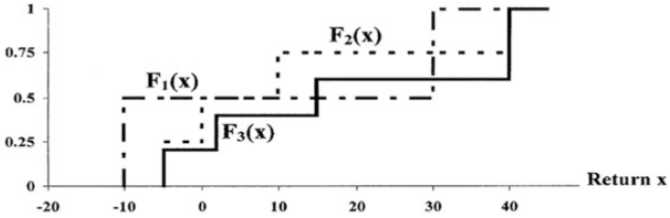
$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < -10\% \\ 1/2 & -10 \leq x < 30\% \\ 1 & x \geq 30\% \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ 1/4 & -5 \leq x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 10 \\ 3/4 & 10 \leq x < 40 \\ 1 & x \geq 40 \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ 1/5 & -5 \leq x < 2 \\ 2/5 & 2 \leq x < 15 \\ 3/5 & 15 \leq x < 40 \\ 1 & x \geq 40 \end{cases}$$

FSD: ejemplo

Funciones de probabilidad acumulada



FSD: ejemplo

- F_3 domina a F_2.
- Es la única relación de dominancia que hay.

FSD: consecuencias

- Si $X \succeq_1 Y$ entonces, $EY \leq EX$. El converso no es cierto.
- La relación $\succeq_1$ induce un orden parcial sobre el espacio de funciones de distribución.

Dominancia de segundo orden

Sean X y Y dos variables aleatorias con funciones de distribución F, G respectivamente. Entonces X domina a Y estocásticamente en segundo orden (SSD), si y solo si

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

y se denota $X \succeq_2 Y$.

Resultados

Para todo X y para todo Y se tiene

$$X \succeq_1 Y \iff VaR_X(\alpha) \leq VaR_Y(\alpha), \forall \alpha \in (0, 1]$$

Resultados

Para todo X y Y con soporte continuo, sin átomos y absolutamente integrables se tiene se tiene

$$X \succeq_2 Y \iff C - VaR_X(\alpha) \leq C - VaR_Y(\alpha), \forall \alpha \in (0, 1]$$

Referencias

- Levy, H. (2006) Stochastic Dominance: investment decision making under uncertainty. Springer, NY
- Ma, C., & Wong, W. K. (2010). Stochastic dominance and risk measure: A decision-theoretic foundation for VaR and C-VaR. European Journal of Operational Research, 207(2), 927-935.

GRACIAS