

# Estudio del efecto de apalancamiento en series financieras usando un modelo TAR

Oscar Andrés Espinosa Acuña

Director: Fabio H. Nieto Ph.D.

Tesis presentada como requisito  
parcial para optar al título de:  
Magister en Ciencias – Estadística

QUANTIL - Bogotá, D.C., 11 de agosto de 2016

# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

- En el campo bursátil, es de vital importancia la construcción de modelos que permitan explicar la evolución y la dinámica de las series temporales financieras debido a sus características específicas, que las diferencian de otras variables del análisis económico.
- Los avances teóricos de Moreno (2010) y Nieto y Moreno (2011; 2016) han probado que el proceso estocástico autorregresivo de umbrales (TAR) sin retroalimentación, puede llegar a representar algunas propiedades de las series financieras.
- Dado ello, se presenta una interesante línea de investigación, referente a las bondades de este modelo no lineal para la especificación de un posible efecto de apalancamiento.

# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

## General

- Determinar si un modelo TAR sin retroalimentación, permite especificar el efecto de apalancamiento presente en una serie de tiempo financiera.

## Específico

- Comparar la modelación de series de tiempo financieras a partir de un proceso TAR y un proceso autorregresivo de heterocedasticidad condicional multivariante (MGARCH), principalmente en lo que respecta a la representación del efecto de apalancamiento y a los momentos condicionales.

# Hechos estilizados de las series financieras

Al denotar  $P_t$ , con  $t \in \mathbb{Z}$ , como la serie de precios de un activo financiero en el tiempo  $t$ , los retornos simples  $R_t$  son definidos como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

Para cada  $t$ , se define el log-retorno  $r_t$  a través de (Fan y Yao, 2003):

$$\begin{aligned} r_t &= \ln(1 + R_t) = \ln\left(1 + \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1\right) \\ &= \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \end{aligned}$$

# Hechos estilizados de las series financieras

Dentro de los hechos estilizados más importantes se destacan:

- No cumplimiento de la hipótesis débil de eficiencia de los mercados financieros (Karemera *et al.*, 1999; Worthington y Higgs, 2003; Hoque *et al.*, 2007; Alonso y Torres, 2014; Ojeda y Castaño, 2014).
- Lento decaimiento de la autocorrelación en los retornos al cuadrado y en los retornos absolutos (Granger y Ding, 1995; Cont, 2001).
- Distribución con colas pesadas (Mitchell, 1915; 1921; Olivier, 1926; Mills, 1927; Lux y Sornette, 2002).
- Conglomerados de datos extremos (Brock *et al.*, 1991; Brooks, 1996; Lux y Marchesi, 2000; Ammermann y Patterson, 2003).
- Gaussianidad agregada (Rydén *et al.*, 1998; Sewell, 2011).
- **Efecto de apalancamiento** (Black, 1976; Christie, 1982).



# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura**
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

- Desde el siglo pasado, autores como Mitchell (1915; 1921), Olivier (1926), Mills (1927) y Fama (1965; 1970) tuvieron el interés de indagar sobre aquellos aspectos propios de los precios en los mercados financieros.
- En la literatura especializada, los modelos más utilizados para la modelación de series financieras han sido los derivados de la familia ARCH (Engle, 1982). Y que específicamente incluyeran el efecto de apalancamiento:
  - En su versión univariada: GARCH exponencial de Nelson (1991), GARCH cuadrático de Engle y Ng (1993), GJR-GARCH de Glosten *et al.* (1993), GARCH de potencia asimétrico hiperbólico de Schoffer (2003), entre otros.
  - En su versión multivariada (MGARCH): Covarianza dinámica asimétrica de Kroner y Ng (1998), VARMA-AGARCH de McAleer *et al.*, (2009), GARCH matricial-exponencial de Kawakatsu (2006), GARCH con asimetría dinámica -DAMGARCH- de Caporin y McAleer (2011), entre otros.

# Revisión de literatura

- No obstante, se han utilizado otros modelos no lineales para su estudio, entre ellos, los de volatilidad estocástica (Taylor, 1986), los SETAR (Tong, 1990), los de cambio de régimen (Hamilton, 1994), entre otros.
- Moreno (2010) y Nieto y Moreno (2011) fueron los primeros autores en la modelación TAR para series financieras (vía distribuciones condicionales).
- En Colombia, los modelos TAR han sido utilizados en el análisis de series de tiempo hidrológicas, económicas y financieras (p.e. Hoyos, 2006; Moreno, 2010; Zhang y Nieto, 2015). Mientras que los procesos ARCH han sido utilizados para el análisis de series financieras (p.e. Ojeda y Castaño, 2014).
- La revisión de literatura internacional no arrojó estudios que tratarán la temática objetivo, por lo cual se consideró un **objetivo novedoso a desarrollar** en el presente trabajo.

# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Especificación del modelo TAR

Sean  $\{Z_t\}$  y  $\{X_t\}$  dos procesos estocásticos (Nieto, 2005)

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + h^{(j)} \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

si  $Z_t \in B_j = (r_{j-1}, r_j]$ , para algún  $j = 1, \dots, l$ .

$\{Z_t\}$  sigue una cadena de Markov homogénea invariante.

$\{\varepsilon_t\} \sim RB$  Gaussiano(0, 1), mutuamente independiente de  $\{Z_t\}$ .

Los parámetros del  $TAR(l; k_1, k_2, \dots, k_l)$  se pueden dividir en dos grupos:

- I) **Parámetros estructurales:**  $l, r_1, r_2, \dots, r_{l-1}$  y  $k_1, k_2, \dots, k_l$ .
- II) **Parámetros no estructurales:**  $a_i^{(j)}$  con  $i = 0, 1, \dots, k_j$  ( $j = 1, \dots, l - 1$ ) y  $h^{(1)}, \dots, h^{(l)}$  con  $j = 1, \dots, l - 1$ .

# Estacionariedad débil asintótica de un proceso TAR

Para cada  $t \in \mathbb{Z}$ , es posible computar la distribución marginal de  $X_t$  mediante

$$F_t(x) = \sum_{j=1}^l p_{t,j} F_{t,j}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } p_{t,j} = P(Z_t \in B_j), \\ j = 1, \dots, l \text{ y } F_{t,j}(x) = P(X_t \leq x | Z_t \in B_j).$$

Nieto y Moreno (2016) encuentran que si las raíces del polinomio

$$\phi_j(z) = 1 - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} z^i, \quad z \in \mathbb{C}$$

se encuentran por fuera del círculo unitario,  $F_{t,j}$  no depende de  $t$ .

De otra parte, dada la convergencia débil de  $\{Z_t\}$  a  $F$ , se tiene que  $p_{t,j} \rightarrow p_j = F(r_j) - F(r_{j-1})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $j = 1, \dots, l$ . Luego,

$$E(X_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1},$$

$$\text{y} \quad \text{Cov}(X_t, X_{t-\omega}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{j,k=1}^l p_{\omega,jk} q_{jk}(\omega) - \mu^2, \quad \omega \in \mathbb{Z}.$$

# Estacionariedad débil de un proceso TAR

Por otra parte, si  $\{Z_t\}$  tiene distribuciones marginales univariadas idénticas, entonces la función de distribución acumulada de  $Z_t$  es  $F$  para todo  $t$  y por lo tanto  $p_{t,j} = p_j$  para todo  $t$  y para todo  $j = 1, \dots, l$ .

De manera que,

$$E(X_t) = \sum_{j=1}^l p_j \mu_{j,1},$$

y

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-\omega}) = \sum_{j,k=1}^l p_{\omega,jk} q_{jk}(\omega) - \mu^2, \quad \omega \in \mathbb{Z},$$

donde  $\mu_{j,1} = \int_{\mathbb{R}} x dF_j(x)$ ,  $p_{\omega,jk} = P(Z_t \in B_j, Z_{t-\omega} \in B_k)$  y  $q_{jk}(\omega) = \mu_{j,1}\mu_{k,1} + h^{(j)}h^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^{(k)} \psi_{m+\omega}^{(j)}$  para todo  $j, k = 1, \dots, l$  y para todo  $t$  (Nieto y Moreno, 2016).

# Distribuciones condicionales para un modelo

## TAR( $l; k_1, k_2, \dots, k_l$ )

Tabla 1: Distribuciones condicionales para un modelo TAR.

Condicionando en	Media	Varianza
Un régimen <b>Tipo I</b>	$E(X_t   Z_t \in B_j) = \psi_j(1) a_0^{(j)},$ donde $\psi_j(1) = \frac{1}{\phi_j(1)}$ $= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{(j)}$	$\text{Var}(X_t   Z_t \in B_j) = (h^{(j)} \bar{\sigma}_j)^2,$ donde $\sigma_j = \sqrt{2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} (\psi_i^{(j)})^2 \right)}$
Un régimen y los datos pasados de la variable de interés <b>Tipo II</b>	$E(X_t   Z_t \in B_t, \bar{x}_{t-1}) =$ $a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$	$\text{Var}(X_t   Z_t \in B_t, \bar{x}_{t-1}) = (h^{(j)})^2$
Los datos pasados de la variable de interés <b>Tipo III</b>	$E(X_t   \bar{x}_{t-1}) =$ $\sum_{j=1}^l p_j a_0^{(j)}$ $+ \sum_{j=1}^l p_j a_1^{(j)} x_{t-1}$ $+ \dots$ $+ \sum_{j=1}^l p_j a_{k_j}^{(j)} x_{t-k_j}$	$\text{Var}(X_t   \bar{x}_{t-1}) =$ $\sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2$ $+ \sum_{j=1}^l p_j \mu_j^2$ $- \left( \sum_{j=1}^l p_j \mu_j \right)^2,$ donde $\mu_j =$ $a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}$

Tres tipos: Para I y II se tienen distribuciones normales, mientras que para III se observa una mezcla de las distribuciones normales condicionales de I y II.



# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR**
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Outline

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR**
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Cálculo analítico de la asimetría

Bajo la condición de estacionariedad débil,  $\mu = E(X_t)$ . Luego, la asimetría como tercer momento estandarizado de  $X_t$  es

$$\alpha_3 = \frac{E(X_t - \mu)^3}{[E(X_t - \mu)^2]^{3/2}},$$

para cada  $t$ . Y al definir  $\mu'_{j,3} = E[(X_t - \mu)^3 | Z_t \in B_j]$  y  $\mu'_{j,2} = E[(X_t - \mu)^2 | Z_t \in B_j]$ ,

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{j=1}^I p_j \mu'_{j,3}}{\left( \sum_{j=1}^I p_j \mu'_{j,2} \right)^{3/2}},$$

Al saber que  $X_t|Z_t \in B_j \sim N(\psi_j(1)a_0^{(j)}, (h^{(j)}\bar{\sigma}_j)^2)$ , por medio de la FGM se puede calcular los primeros tres momentos centrales de  $X_t|Z_t \in B_j$  alrededor de cero.

De esta manera, después de algunos desarrollos algebraicos,

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{j=1}^I p_j [(\mu_{j,1} - \mu) (3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2)]}{\left[ \sum_{j=1}^I p_j (\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2) \right]^{3/2}},$$

donde  $\sigma_j^2 = [h^{(j)}]^2 \bar{\sigma}_j^2$ .

## Importante

$$\alpha_3 \text{ es } \begin{cases} < 0, & \text{si } \sum_{j=1}^I p_j \left[ (\mu_{j,1} - \mu) \left( 3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2 \right) \right] < 0, \\ \geq 0, & \text{si } \sum_{j=1}^I p_j \left[ (\mu_{j,1} - \mu) \left( 3\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2 \right) \right] \geq 0. \end{cases}$$

El signo del coeficiente de asimetría termina dependiendo esencialmente de la **diferencia** entre  $E(X_t|Z_t \in B_j)$  y  $E(X_t)$ .

# Outline

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR**
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis**
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Cálculo analítico de la curtosis

Asumiendo que  $\{Z_t\}$  tiene distribuciones marginales univariadas idénticas, la curtosis de la variable de interés  $X_t$ , como cuarto momento estandarizado, se define por

$$\alpha_4 = \frac{E(X_t - \mu)^4}{[(X_t - \mu)^2]^2}.$$

Así, luego de varios cálculos se llega a

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{j=1}^I p_j [(\mu_{j,1} - \mu)^4 + 6\sigma_j^2(\mu_{j,1} - \mu)^2 + 3\sigma_j^4]}{\left[ \sum_{j=1}^I p_j (\sigma_j^2 + (\mu_{j,1} - \mu)^2) \right]^2}.$$

## Importante

Se debe tener cuidado en la interpretación de la curtosis para el caso de un modelo TAR, ya que la distribución de la variable  $X_t$ ,

$$F(x) = \sum_{j=1}^l p_j F_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, l,$$

es una mezcla de distribuciones acumuladas condicionales dado que  $\sum_{j=1}^l p_j = 1$  y en consecuencia  $F(x)$  es multimodal.

En la literatura internacional aún no se tiene claridad sobre la interpretación del coeficiente de curtosis de una distribución multimodal (Knapp, 2007; Cahoy, 2015; Chakraborty, Hazarika y Ali, 2015).



**Modelo 1 (M1).** Proceso TAR(2;0,1) dado por

$$X_t = \begin{cases} 0.6 + 0.7\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 0, \\ 0.2 + 0.4X_{t-1} + 1.1\varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 0, \end{cases}$$

donde  $\varepsilon_t \sim RBG(0,1)$ ,  $Z_t = 0.5Z_{t-1} + \tau_t$  con  $\tau_t \sim RBG(0,1)$ . Acá  $p_1 = p_2$ .

**Modelo 2 (M2).** Proceso TAR(2;2,3) dado por

$$X_t = \begin{cases} 2.9 + 0.3X_{t-1} - 0.4X_{t-2} + 1.5\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 0, \\ 0.6 - 0.3X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 0, \end{cases}$$

donde  $\varepsilon_t \sim RBG(0,1)$ ,  $Z_t = 0.4Z_{t-1} + \tau_t$  con  $\tau_t \sim RBG(0,0.5)$ . Se obtiene que  $p_1 = p_2$ .

**Modelo 3 (M3).** Proceso TAR(3;3,1,3) dado por

$$X_t = \begin{cases} -1.6 + 0.2X_{t-1} - 0.6X_{t-2} - 0.1X_{t-3} + 3\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq -1, \\ 0.9 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } -1 < Z_t \leq 1, \\ 4 - 0.7X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + 0.1X_{t-3} + 2\varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 1, \end{cases}$$

donde  $\varepsilon_t \sim RBG(0, 1)$ ,  $Z_t = 0.6Z_{t-1} + \tau_t$  con  $\tau_t \sim RBG(0, 1)$ . En este modelo  $p_2 = 0.6$  y  $p_1 = p_3$ .

Cada modelo, M1, M2, y M3, se simuló 100 veces, con un tamaño muestral de 300. En cada ejercicio se simularon series temporales de longitud 600 y se descartaron las primeras 300 para disminuir el efecto de valores iniciales.

Tabla 2: Resultados de las simulaciones - ASIMETRÍA

Modelo	Coefficiente de asimetría $\alpha_3$	Promedio de la asimetría muestral $\hat{\alpha}_3$	Desviación estándar de $\hat{\alpha}_3$ $ds_{\hat{\alpha}_3}$	Intervalo $\hat{\alpha}_3 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_3}$
M1	-0.1179	-0.1626	0.2061	(-0.5748, 0.2496)
M2	0.2603	0.3446	0.1237	(0.0972, 0.5920)
M3	-0.6558	-0.7312	0.2232	(-1.1776, -0.2849)

Tabla 3: Resultados de las simulaciones - CURTOSIS

Modelo	Coefficiente de curtosis $\alpha_4$	Promedio de la curtosis muestral $\hat{\alpha}_4$	Desviación estándar de $\hat{\alpha}_4$ $ds_{\hat{\alpha}_4}$	Intervalo $\hat{\alpha}_4 \pm 2ds_{\hat{\alpha}_4}$
M1	3.2659	3.6046	0.4515	(2.7016, 4.5076)
M2	2.6847	2.7826	0.2669	(2.2487, 3.3165)
M3	3.6497	4.7848	0.7600	(3.2648, 6.3047)

# Outline

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR**
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento**
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Representación del efecto de apalancamiento en el modelo TAR

A través de la definición de la varianza condicionada a los datos pasados (*Tipo III*),

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t | \tilde{x}_{t-1}) &= \sum_{j=1}^l p_j \left( (h^{(j)})^2 + \left( a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^l p_j \left( a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j \left( a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^l p_j \left( a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

se observa que al tener fijos los parámetros  $p_j$ ,  $h_j$ ,  $a_0^{(j)}$  y  $a_i^{(j)}$ , la varianza condicional del modelo termina en función de los valores que tome  $x_{t-i}$ , afectando directamente su cambio a la volatilidad del sistema,  $\sqrt{\text{Var}(X_t | \tilde{x}_{t-1})}$ .

# Representación del efecto de apalancamiento en el modelo TAR

Al suponer por interpretabilidad que en los  $k_j$  últimos retornos la variable fue de la misma magnitud,  $x^*$ , se tiene que

$$\sqrt[2]{\text{Var}(X_t | \tilde{x}_{t-1})} = \left[ \sum_{j=1}^l p_j (h^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^l p_j \left( a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x^* \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^l p_j \left( a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x^* \right) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Esta forma funcional, se asemeja en gran medida a lo que se representa comúnmente en las Curvas de Impacto de Innovaciones (NIC), de la familia ARCH, donde se termina construyendo gráficamente una curva cóncava hacia arriba.

# Representación del efecto de apalancamiento en el modelo TAR

Para demostrar matemáticamente ello, se calcula la primera derivada con respecto a  $x^*$ , sus raíces (que resulta ser única), y la segunda derivada. Esta última presenta la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \text{Var}(X_t | \tilde{x}_{t-1})}{\partial x^{*2}} = 2 \left[ \sum_{j=1}^l p_j \left( \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^l p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 \right].$$

Bajo la siguiente condición suficiente,

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l p_i p_j \left( \sum_{m=1}^{k_i} a_m^{(i)} \right) \left( \sum_{n=1}^{k_j} a_n^{(j)} \right) \leq 0,$$

se asegura una segunda derivada estrictamente positiva, por lo que se obtiene que la función de varianza condicional *Tipo III* en el punto  $x^*$  es cóncava hacia arriba, y al ser este el único punto crítico, la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

# Representación del efecto de apalancamiento en el modelo TAR

Ahora, tomando el resultado de  $\frac{\partial \text{Var}(X_t | \tilde{x}_{t-1})}{\partial x^*}$ , igualándolo a cero y despejando  $x^*$ ,

$$x^* = \frac{\sum_{j=1}^l [p_j a_0^{(j)}] \sum_{i=1}^l \left[ p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right] - \sum_{j=1}^l \left[ p_j \left( a_0^{(j)} \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right) \right]}{\sum_{j=1}^l \left[ p_j \left( \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right)^2 \right] - \left( \sum_{i=1}^l \left[ p_j \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \right] \right)^2}.$$

Esta expresión resulta ser el valor de  $x^*$  donde la volatilidad es mínima para el modelo TAR( $l; k_1, \dots, k_l$ ) estimado. Tal valor se denota  $x_{\text{mín}}^*$ .

## Importante

¡Si  $x_{\text{mín}}^* > 0$ , se logra captar el concepto del efecto de apalancamiento!, dado que

$$f(x^*) = \sqrt{[\text{Var}(X_t | \tilde{x}_{t-1} = (x^*, \dots, x^*))]} < f(-x^*).$$



# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

- $X_t = \ln(\text{Colcap}_t) - \ln(\text{Colcap}_{t-1})$  y  $Z_t = \ln(\text{S\&P500}_t) - \ln(\text{S\&P500}_{t-1})$ .
- Periodo muestral: 02/01/2009 – 23/06/2015, 1688 observaciones diarias.
- Este periodo contempla una nueva estructura arquitectónica del sistema financiero internacional, luego de la crisis *subprime* originada en el 2007.
- Para efectos del ajuste del modelo, se estiman los datos faltantes de acuerdo a la metodología de Nieto y Ruiz (2002).
- Los resultados obtenidos afirman que a un nivel de significancia del 5%, existe evidencia estadística de que todos los retornos son estacionarios.

Figura 1: Índice Colcap (a) y sus retornos (b), 02/01/2009 - 23/06/2015.

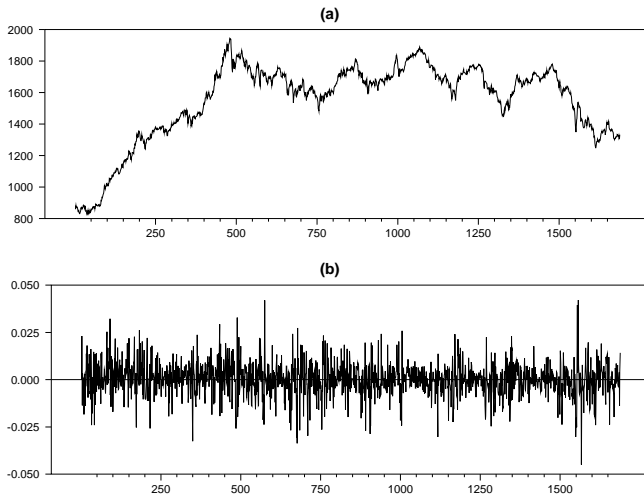


Figura 2: Índice S&P 500 (c) y sus retornos (d), 02/01/2009 - 23/06/2015.

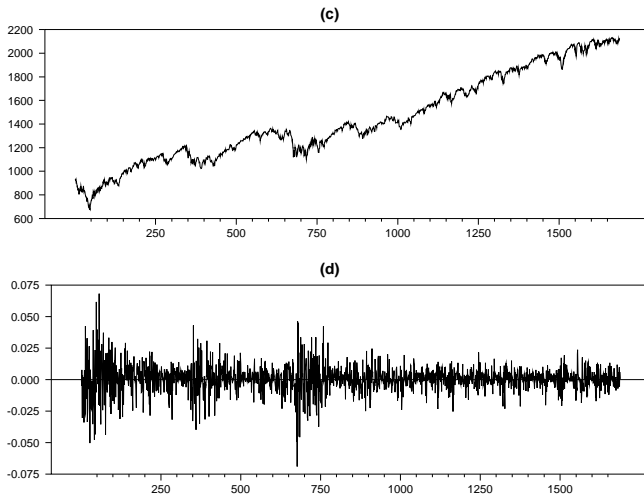


Figura 3: Distribución empírica de los retornos Colcap v.s. Simulación de distribución normal.

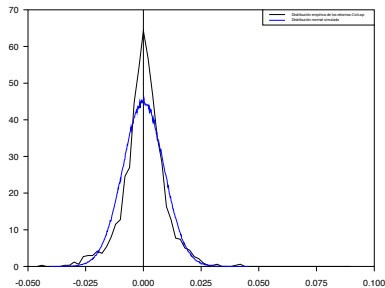


Tabla 4: Estadísticas descriptivas de los retornos Colcap.

	Media	Varianza	Coefficiente de asimetría	Curtois (exceso)	Mínimo	Máximo
<b>Colcap</b>	0.00026	0.00008	-0.12360	2.19350	-0.04490	0.04215
<b>S&amp;P 500</b>	0.00049	0.00012	-0.21153	4.86804	-0.06896	0.06837

# Estimación del modelo TAR

Se siguen la metodología de Nieto (2005) y Nieto y Moreno (2016):

- Prueba de no linealidad
- Identificación de los umbrales
- Identificación del número de regímenes
- Estimación de los órdenes autorregresivos
- Estimación de los parámetros no estructurales
- Validación del modelo

Así, se termina ajustando un modelo TAR(2;0,5) para la serie de retornos del índice bursátil Colcap. Acá,  $p_1 = 0.45$  y  $p_2 = 0.55$ .

# Coefficientes estimados del modelo TAR(2;0,5)

$$X_t = \begin{cases} -0.0023 + 0.0089\varepsilon_t, & \text{si } Z_t \leq 4.2777 \times 10^{-5}, \\ 0.0022 + 0.1446X_{t-1} - 0.0170X_{t-2} - 0.0713X_{t-3} \\ -0.0236X_{t-4} - 0.0792X_{t-5} + 0.0082\varepsilon_t, & \text{si } Z_t > 4.2777 \times 10^{-5}. \end{cases}$$

Figura 4: Función de autocorrelación (a) y de autocorrelación parcial (b) de los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

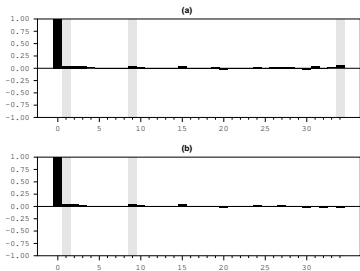
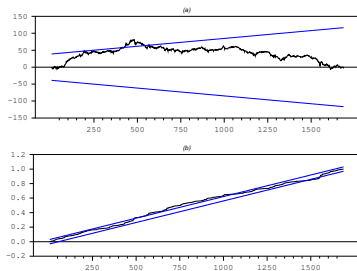


Figura 5: CUSUM (a) y CUSUMSQ (b) para los residuos estandarizados del modelo TAR(2;0,5) de Colcap.



# Modelo MGARCH VAR(p)-A-BEKK(1,1)

Para modelar la correlación de los retornos y su media,  $\mathbf{f}(\mathbf{t} - \mathbf{1})$ , se elige un sistema de vectores autorregresivos (VAR),

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\Gamma}_j \mathbf{R}_{t-j} + \mathbf{a}_t \quad \text{con } \mathbf{a}_t | \mathbf{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t).$$

El modelo asume que la serie  $\{\mathbf{R}_t; t = 1, \dots, T\}$  se comporta condicionalmente heterocedástica con matriz de varianzas y covarianzas  $\mathbf{H}_t$ , definida positiva,  $\text{Var}[\mathbf{R}_t | \mathbf{F}_{t-1}] = \mathbf{H}_t$ , cuya evolución sigue un proceso A-BEKK(1,1) (Engle y Kroner, 1995):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t = & \mathbf{C}' \mathbf{C} + \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_{t-1}' \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\vartheta}' \mathbf{H}_{t-1} \boldsymbol{\vartheta} \\ & + \mathbf{D}' (\mathbf{a}_{t-1} \circ \mathbf{I}(\mathbf{a}_{t-1} < \mathbf{0})) (\mathbf{a}_{t-1} \circ \mathbf{I}(\mathbf{a}_{t-1} < \mathbf{0}))' \mathbf{D}. \end{aligned}$$



# Estimación del modelo VAR(p)-A-BEKK(1,1)

Tabla 5: Resultados de la estimación del modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.

Modelo VAR(1)	$\mu, \Gamma$	$\mu_1$	0.0002
		$\Gamma_{1,1}$	0.0990
		$\Gamma_{1,2}$	0.0484
		$\mu_2$	0.0004
		$\Gamma_{2,1}$	0.0329
		$\Gamma_{2,2}$	-0.0354
Modelo A-BEKK(1,1)	$C$	$c_{1,1}$	0.0025
		$c_{1,2}$	0.0008
		$c_{2,2}$	0.0013
	$\lambda$	$\lambda_{1,1}$	0.2703
		$\lambda_{1,2}$	0.0160
		$\lambda_{2,1}$	-0.0745
		$\lambda_{2,2}$	-0.0217
	$\vartheta$	$\vartheta_{1,1}$	0.8964
		$\vartheta_{1,2}$	-0.0238
		$\vartheta_{2,1}$	0.0046
		$\vartheta_{2,2}$	0.9390
	$D$	$d_{1,1}$	0.2924
		$d_{1,2}$	0.0456
		$d_{2,1}$	0.0541
$d_{2,2}$		0.4460	
<b>Contrastes conjuntos</b>			
	<b>Rezagos</b>	<b>Estadística</b>	<b>P-valor</b>
Test Q multivariado	15	45.0509	0.9245
Test ARCH multivariado	15	102.9125	0.1664
Test Jarque-Bera multivariado	-	201.433	0.0000

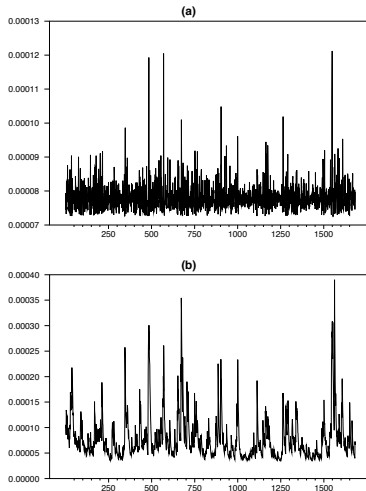
# Comparación de momentos condicionales y no condicionales

Tabla 6: Comparación de los momentos condicionales y no condicionales de los modelos TAR(2;0,5) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.

Momento	TAR	MGARCH
$E(X_t)$	0.0001	0.0001
$Var(X_t)$	0.0001	0.0001
$\alpha_3$	-0.0422	-0.0331
$\alpha_4$	3.0050	5.2237
$E(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0002 + 0.0795x_{t-1}$ $-0.0094x_{t-2} - 0.0392x_{t-3}$ $-0.0130x_{t-4} - 0.0436x_{t-5}$	$0.0002 + 0.0990x_{t-1}$ $+0.0484z_{t-1}$
$Var(X_t \tilde{x}_{t-1})$	$0.0001 + 0.55(0.0022$ $+0.1446x_{t-1} - 0.0170x_{t-2}$ $-0.0713x_{t-3} - 0.0236x_{t-4}$ $-0.0792x_{t-5})^2 - (0.0002$ $+0.0795x_{t-1} - 0.0094x_{t-2}$ $-0.0392x_{t-3} - 0.0130x_{t-4}$ $-0.0436x_{t-5})^2$	$6.25 \times 10^{-6} + 0.0731a_{1,t-1}^2$ $-0.0403a_{1,t-1}a_{2,t-1} + 0.0056a_{2,t-1}^2$ $+0.8035\sigma_{1,1,t-1}^2 + 0.0082\sigma_{2,1,t-1}^2$ $+2.1160 \times 10^{-5}\sigma_{2,2,t-1}^2 + 0.0855\zeta_{1,t-1}^2$ $+0.0158\zeta_{1,t-1}\zeta_{2,t-1} + 0.0029\zeta_{2,t-1}^2$

# Comparación de la función de varianza condicional

Figura 6: Funciones de varianza condicional estimadas para los modelos TAR(2;0,5) (a) y VAR(1)-A-BEKK(1,1) (b) de Colcap.



# Representación del efecto de apalancamiento - NIC

Figura 7: Curva de impacto de nueva información para el modelo TAR(2;0,5) de Colcap.

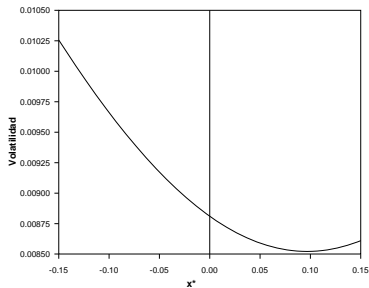
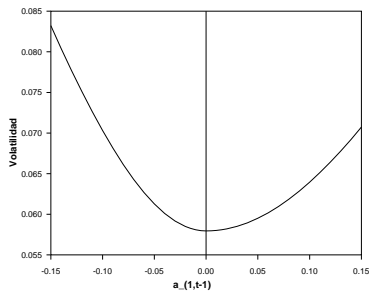


Figura 8: Curva de impacto de nueva información para el modelo VAR(1)-A-BEKK(1,1) de Colcap.



# Representación del efecto de apalancamiento - French *et al.* (1987)

Resultados de las estimaciones de las regresiones propuestas por French *et al.* (1987).

Estadístico  $t$  entre paréntesis.

$$\ln \left( \frac{\sigma_{t \text{ TAR}}}{\sigma_{t-1 \text{ TAR}}} \right) = 0.0005 - 2.1563 r_{t-1}.$$

(0.9099)      (-32.3960)

$$\ln \left( \frac{\sigma_{t \text{ MGARCH}}}{\sigma_{t-1 \text{ MGARCH}}} \right) = 0.0011 - 4.5597 r_{t-1}.$$

(0.5619)      (-21.0202)

# Agenda

- 1 Motivación
- 2 Objetivos de la investigación
- 3 Revisión de literatura
- 4 Caracterización teórica del modelo TAR
- 5 Nuevas características del modelo TAR
  - Cálculo analítico de la asimetría
  - Cálculo analítico de la curtosis
  - Representación del efecto de apalancamiento
- 6 Comprobación empírica: Índice bursátil COLCAP
- 7 Conclusiones y recomendaciones

# Conclusiones y recomendaciones

- Se logran construir curvas de impacto de las innovaciones (NIC) desde un modelo autorregresivo de umbrales (TAR).
- Al comparar empíricamente un modelo TAR con un modelo MGARCH, se encuentra que tiene un ajuste aceptable, en términos de asimetría, dinámica de las funciones de varianza condicional y representación del efecto de apalancamiento.
- Se hallan las expresiones analíticas para el cálculo de la asimetría y de la curtosis de un modelo TAR estacionario en sentido débil.
- Ningún modelo TAR logra captar la leptocurtosis de manera adecuada, como si lo hacen los modelos MGARCH.
- Se recomienda para trabajos futuros, estudiar bajo qué condiciones sobre los parámetros de un modelo  $TAR(I, k_1, k_2, \dots, k_I)$ ,  $x_{\text{mín}}^*$  es positivo.

- International Finance Conference 2015, American Academy of Financial Management (AAFM). November 26-27. Bogotá, Colombia.

**Oral presentation**

- The 26th Nordic Conference in Mathematical Statistics, 2016. June 27-30. Copenhagen, Denmark.

**Accepted for a poster presentation**

- The International Work-Conference on Time Series (ITISE), 2016. June 25-27. Granada-Spain.

**Accepted for a virtual presentation**

- Royal Statistical Society (RSS) 2016 International Conference. September 5-8. Manchester, England.

**Accepted for a poster presentation**



**¡GRACIAS!**