

# Estudio de entropía en sistemas económicos financieros con correlación de largo rango

## Entropía como herramienta

Barrios P. O. <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física  
Universidad Nacional de Colombia

Septiembre 2016

# Outline

- 1 Planteamiento del problema
- 2 Objetivo y motivación
- 3 Conocimiento previos
- 4 Precio de la acción
- 5 Volatilidad estándar
- 6 Entropía Rényi
- 7 Entropía de Tsallis
- 8 Conclusiones
- 9 Bibliografía

La volatilidad es utilizada para determinar la desviación estándar del precio de la acción, por lo cual tiene una gran importancia a la hora de seguir el comportamiento de una acción, de invertir o de calcular el riesgo, ya que el mercado se mueve al rededor de estos factores. ¿Pero siempre es confiable esta medida? No, ya que depende de muchos factores, en particular debido la naturaleza estocástica de la muestra.

El problema entonces, es plantear la entropía como una herramienta para medir la desinformación o el grado de desorden de los sistemas financieros con correlación de largo rango.

Finalmente, se desea comparar el efecto del escalamiento de las series de tiempo en las entropías. Las series fueron obtenidas a partir de las bases de datos financieras, como Yahoo Finance.

- **Objetivo:** Utilizar la entropía como herramienta para el estudio de la variación del precio bursátil de las series de tiempo financieras. Determinando así la relación desde una perspectiva econofísica entre la volatilidad y la entropía.
- **Motivación:** El estudio de los sistemas financieros desde una perspectiva de física permite adquirir y reforzar conocimientos sobre los sistemas que no están en equilibrio.

# Proceso estocástico

Colección de variables aleatorias  $X = \{X(t), t \in T\}$ . Se define un proceso estacionario cuando es temporalmente homogéneo, es decir, sus propiedades permanecen invariantes sin importar la escala en el tiempo. En el lenguaje matemático un *proceso estacionario* es aquel que:

$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, \dots, X_n \leq a_n\} &= \\ &= F(a_1, a_2, \dots, a_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= F(a_1, a_2, \dots, a_n, t_{1+T}, t_{2+T}, \dots, t_{n+T}) \end{aligned}$$

# Volatilidad

Es un componente para derivar los principios de funcionamiento de las finanzas y estimar el valor de  $\sigma$ . Un método para estimar la volatilidad es conocido como *volatilidad histórica*. Uno de los mayores problemas para determinar la volatilidad es seleccionar adecuadamente el tamaño de la muestra, o el número de observaciones necesarias que podrán ser usadas para estimar  $\sigma$ .

$$r(t) = \log S(t) - \log S(t-1) = \log \left( \frac{S(t)}{S(t-1)} \right) \quad (1a)$$

$$R(t) = |r(t)| \quad (1b)$$

donde  $S(t)$ ,  $r(t)$  y  $R(t)$  respectivamente son el precio de cierre en el intervalo  $t$ , el retorno y la volatilidad.

Luego la desviación estándar para un periodo de tiempo  $T$  es:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \langle r \rangle)^2}{T - 1}} \quad (2)$$

donde  $\langle r \rangle = \sum_{t=1}^T r_t / T$  representa el valor esperado del retorno [?].  
Se puede obtener el valor de volatilidad estándar como:

$$R'(t) = \frac{[R(t) - \langle R(t) \rangle]}{\sigma(R(t))} \quad (3)$$

Donde  $\langle R(t) \rangle$  representa el valor medio de la volatilidad y  $\sigma(R(t))$  la desviación estándar de la misma.

Para un proceso estacionario, se debe tener en cuenta la integral de  $R(t)$ , la cual puede tener tres posibilidades, ser finita, infinita o estar indeterminada. Cuando  $T = \int_0^\infty R(s)ds$  es finita, entonces existe un tiempo típico de memoria  $T$  llamado *tiempo de correlación* del proceso. Consideremos, en general el valor de la varianza de la suma  $S_n$  de  $n$  variables estocásticas  $x_i$ , donde [?]:

$$E\{S_n^2\} \approx n \left( E\{x_i^2\} + 2 \sum_{k=1}^n E\{x_i x_{i+k}\} \right) \quad (4)$$

Dependiendo del valor del segundo término de la ecuación, se tienen dos casos:

- Correlación a corto rango

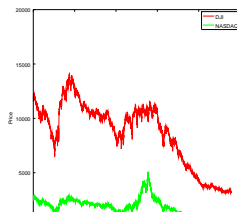
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n E\{x_i x_{i+k}\} = \text{constante}$$

- Correlación a largo rango

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n E\{x_i x_{i+k}\} = \infty$$

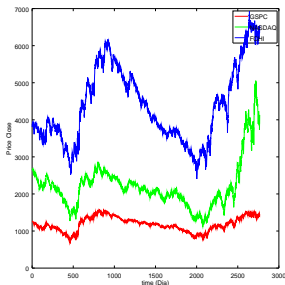


# Precio de la acción

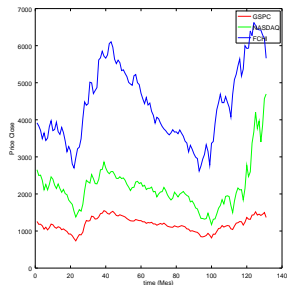


**Figure:** Valor del precio de la acción de cierre diario entre 23 de Marzo de 1992 hasta 22 de Marzo de 2011 de Nasdaq y DJI.

# Precio de la acción: Diario - Mensual



(a) Precio acción diario



(b) Precio acción mensual

**Figure:** Precio de la acción de cierre entre 1 de enero del 2000 hasta el 31 de diciembre del 2010 para los índices Nasdaq, FCHI y Gspc.

# Volatilidad estándar

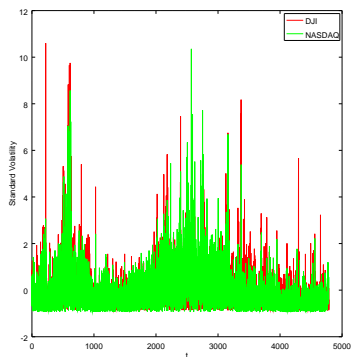
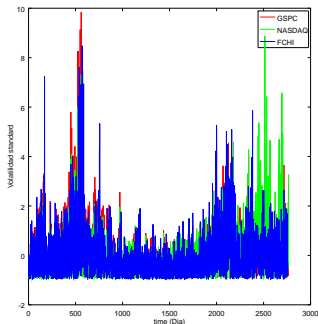
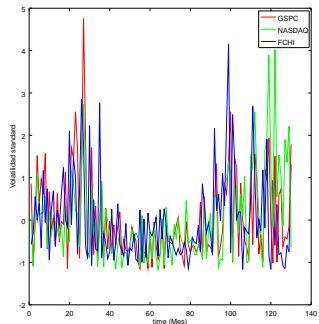


Figure: Volatilidad estándar diaria entre 23 de Marzo de 1992 hasta 22 de Marzo de 2011 de Nasdaq y DJI.

# Volatilidad estándar: diario-mensual



(a) Volatilidad Diaria



(b) Volatilidad Mensual

**Figure:** Volatilidad estándar entre 1 de enero del 2000 hasta el 31 de diciembre del 2010 para los índices Nasdaq, FCHI y Gspc.

# Entropía Shannon

La entropía representa la des información que tenemos del sistema:  
 Sea  $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  es una distribución discreta de probabilidad.  
 Suponga que

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) \equiv \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \quad (5a)$$

donde

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (5b)$$

Se dice entonces, que un sistema esta en equilibrio cuando la entropía se maximiza. En particular se tiene el ensamble canónico, en el cual se maximiza la entropía cuando se tiene una distribución de probabilidad Boltzmann- Gibbs.

A continuación se presentará un *Lema*, por el cual se podrá obtener la entropía de Rényi:

*Lema:* Sea  $f(n)$  una función numérica aditiva, donde,  $f(n)$  es definida por  $n = 1, 2, \dots$  suponga entonces:

$$f(nm) = f(n) + f(m) \quad (6)$$

Luego suponga que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n+1) - f(n)] = 0$$

Entonces se tiene que:

$$f(n) = c \log n \quad (7)$$

donde  $c$  es una constante.

# Entropía Rényi: Resumen

Característica de la entropía:

$$H[\mathcal{P} * \mathcal{Q}] = H[\mathcal{P}] + H[\mathcal{P}] \quad (8)$$

Entropía de Rényi:

$$H_q = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_{i=1}^N p_i^q \quad (9)$$

Función de Probabilidad:

$$P_i(t) = \frac{N_i(t)}{(N-t+1)} \quad (10)$$

# Probabilidad $q$ : $P_i^q$

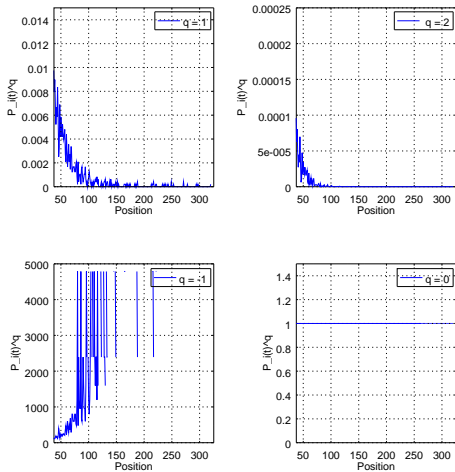
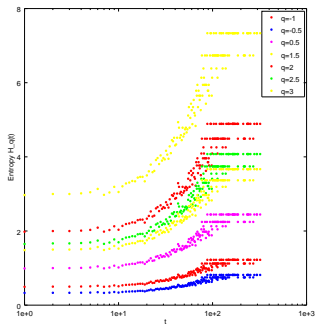


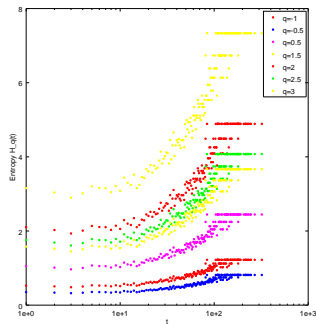
Figure: Efecto del parámetro  $\alpha$  en la probabilidad  $P_i^q$ .



# Entropía Rényi



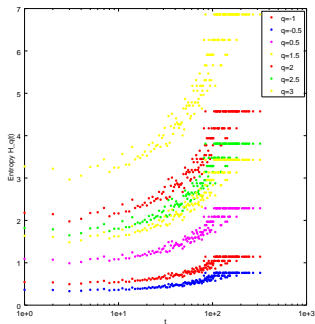
(a) E. Rényi de DJI



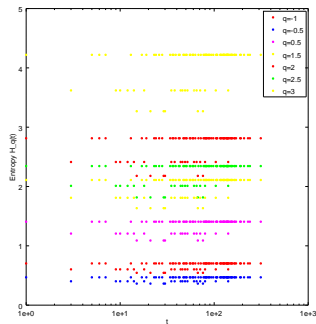
(b) E. Rényi de NASDAQ

Figure: Entropía de Rényi para los índices DJI y NASDAQ

# Entropía Rényi



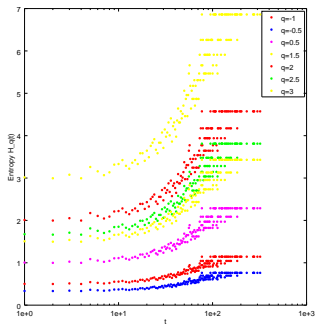
(a) frecuencia diaria.



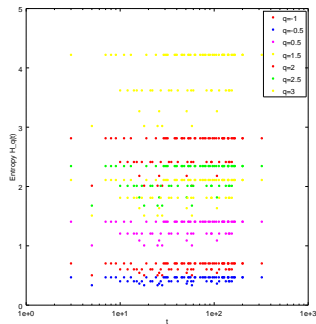
(b) frecuencia mensual.

Figure: Entropía de Rényi para los índice FCHI.

# Entropía Rényi



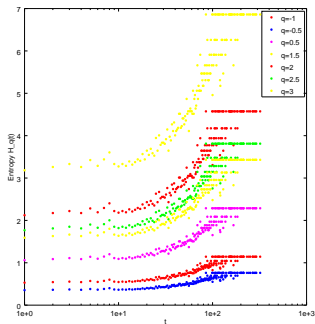
(a) frecuencia diaria.



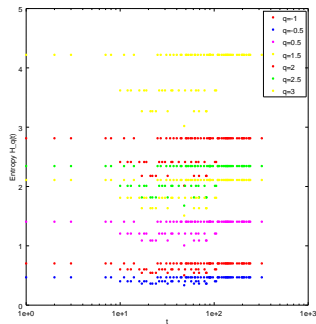
(b) frecuencia mensual.

Figure: Entropía de Rényi para los índice Gspc.

# Entropía Rényi



(a) frecuencia diaria.



(b) frecuencia mensual.

Figure: Entropía de Rényi para los índice Nasdaq.

# Entropía Tsallis: Resumen

Entropía de Tsallis:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \left( \int f_X(x)^\alpha dx - 1 \right)$$

Al maximizar la entropía se obtiene la FDP de Tsallis y tiene la forma de una distribución generalizada de Pareto (GPD):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\gamma}{\sigma} x \right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}$$

con

$$x_F \geq x \geq 0$$

# Entropía de Tsallis: Resumen

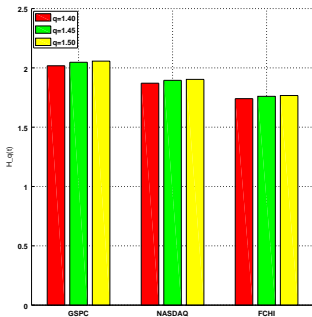
La entropía de Tsallis se puede determinar de forma particular como:

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad (11)$$

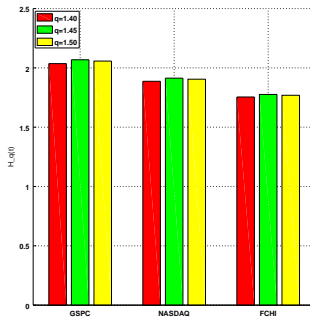
con:

$$y = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} \equiv e_q^x(x), (x \geq 0, q \in) \quad (12)$$

# Entropía Tsallis



(a) frecuencia diaria.



(b) frecuencia mensual.

Figure: Entropía de Tsallis para los índices Nasdaq, FCHI y Gspc.

Frecuencia	Entropía de Tsallis			
	índice	$q = 1.4$	$q = 1.45$	$q = 1.5$
31cmDiaria	Gspc	2.017777	1.870895	1.740536
	Nasdaq	2.047246	1.894964	1.760210s
	FCHI	2.056851	1.903039	1.766995
41cmMensual	Gspc	2.035936	1.886991	1.754642
	Nasdaq	2.068378	1.913310	1.776000
	FCHI	2.057402	1.904572	1.769047

Table: Valores de la entropía de Rényi en función del parámetro  $q$ .



	Desviación estándar de log-retorno	
Frecuencia	índice	std
21cmDiaria	Gspc	0.0101904
	Nasdaq	0.013477
	FCHI	0.011200
21cmMensual	Gspc	0.031454
	Nasdaq	0.050079
	FCHI	0.036089

Table: Valores de la desviación estándar para los log-retornos.

## Conclusión:

La entropía de Rényi y la entropía de Tsallis permite una mirada mas general y sin restricciones sobre el sistema, en este caso los valores de los log-retornos de los índices Nasdaq, Dji, FCHI y Gspc, que las que nos permite la entropía de Shannon. Debido a que la entropía de Shannon es planteada para estudiar el nivel de desorden de sistemas bien comportados, es decir, que no presenten anomalías como las que se podrían en sistemas reales, por lo cual la entropía de Rényi y Tsallis surgen como una generalización de esta, permitiendo estudiar y analizar dichas anomalías a través de los valores del parámetro  $q$ .

## Conclusión:

Tanto la entropía de Rényi como la entropía de Tsallis dependen directamente del parámetro  $q$ , ya que para cada uno de los rangos de  $q$  tomaran mayor fuerza eventos con diferente probabilidad. En particular, en la entropía de Rényi se observó que para valores con  $q$  se resaltaban los eventos en los cuales la probabilidad era muy pequeña, mientras que para valores de  $q$  grandes tomaban mayor peso los eventos con probabilidad muy alta en el valor de la entropía.

## Conclusión:

Al tomar frecuencias diarias y mensuales para los índices Nasdaq, FCHI y Gspc en el intervalo de tiempo del 2000 al 2010, se observó la entropía de Rényi era mucho más precisa cuando se tomaba una frecuencia diaria y describía un comportamiento creciente en el tiempo, pero cuando se tomaba una frecuencia baja, mensual, entonces la entropía de Rényi perdía su precisión y no se podía observar claramente el comportamiento de esta respecto al tiempo. Por otro lado, para la entropía de Tsallis se observaron variaciones de centésimas al determinarla en función de la frecuencia diaria y la frecuencia mensual, aun así esto se interpreta como una dependencia del valor de la entropía respecto a la frecuencia con la cual se observa la variable estocástica.

## Conclusión:

Finalmente, al comparar los valores de la desviación estándar de los log-retornos y la entropía (Tsallis), se observa que ambas cantidades nos dan una medida de incertidumbre de los índices. Es decir, si bien, la entropía se relaciona con el nivel de desinformación del sistema en general y la desviación estándar una medida de incertidumbre respecto al valor medio, ambas cantidades nos dan a entender el nivel de confiabilidad en el índice o la acción. Visto esto desde una perspectiva financiera, estas cantidades nos dice que tan predecible es el comportamiento de la acción en el tiempo y un nivel de confiabilidad al momento de invertir en la acción.

# Bibliografía

- C. Tsallis, C. Anteneodo, L. Borland, R. Osorio, Entropy: A new measure of stock market volatility?.
- Jinhjin Huang, Pengjian Shang, Xiaojun Zhao, Multifractal diffusion entropy analysis on stock volatility in financial markets.
- A. Carbone, H. Stanley, Scaling properties and entropy of long-range correlated times series.
- L. Blanco C. , V. Arunachalam, D. Dharmaraja, Introduction to Probability and Stochastic Processes, Cap 12.
- R. Mantegna, H. Stanley, An Introduction to econophysics, Cap 6,7.
- Sheldon M. Ross, Stochastic processes.
- Fazlollah M. Reza, An Introduction to information theory.
- Alfred Renyi, On measures of entropy and information.
- P. Jizba, T. Arimitsu, The world according to Rényi: Thermodynamics of multifractal systems.
- L. McCauley, Time Vs. Ensembles Averages for Nonstationary Times series.