Tesis Doctoral: Modelos basados en Precios Futuros y Extensión del Teorema de Lévy

Diego Jara

Quantil - Tesis en Carnegie Mellon - Asesor David Heath

diego.jara@quantil.com

Noviembre 1, 2018

Overview

1. Preámbulo
   - Movimiento Browniano
   - Variación Cuadrática
   - Modelando con el MB
   - MB en Matemáticas Financieras
2. Modelos de Precios Futuros
   - Economía Basada en Precios Futuros
   - Aplicación Práctica
3. Distribución de Modelos a Partir de Covarianzas
   - Pregunta a Responder
   - Martingalas Continuas Caracterizadas por VC
   - Caracterización de Soluciones de SDEs

Qué es el Movimiento Browniano?

Imaginemos un caminante "aleatorio": lanza una moneda cada segundo

- Cara: avanza un metro.
- Sello: retrocede un metro.

Qué es el Movimiento Browniano?

Imaginemos un caminante "aleatorio": lanza una moneda cada segundo

- Cara: avanza un metro.
- Sello: retrocede un metro.

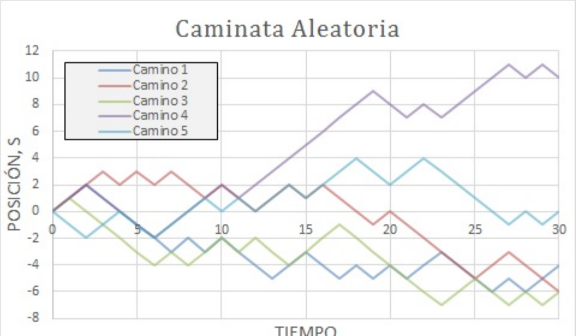
Posición de este caminante en el tiempo: B(T).

Qué es el Movimiento Browniano?

Imaginemos un caminante "aleatorio": lanza una moneda cada segundo

- Cara: avanza un metro.
- Sello: retrocede un metro.

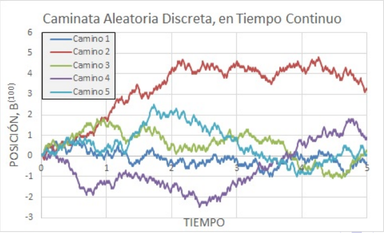
Posición de este caminante en el tiempo: B(T).
Cinco posibles caminos de este proceso estocástico hasta $T = 30$
(la gráfica hace un poco de trampa porque en la mitad de cada segundo no se mueve; el salto es inmediato)



Construcción del MB

- Esa caminata anterior la llamamos $B^{(1)}$.
- Pensemos en caminantes más pequeños: pasos menos largos pero más frecuentes.
- Fijamos n y construimos la caminata $B^{(n)}$:
  - Lanza la moneda cada $\frac{1}{n}$ segundos.
  - Cada paso avanza (o retrocede) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ metros.
  - Por simplicidad, pensemos que los pasos son homogéneos: posición continua en el tiempo.

Así se ven cinco posibles caminos de $B^{(100)}$ hasta $T = 5$ segundos:



Construcción del MB

Cuando $n \to \infty$, estos caminos convergen al Movimiento Browniano: "$B^{(\infty)}$". Algunas propiedades (heredadas del caso discreto):

- $B(0) = 0$.

Construcción del MB

Cuando $n \to \infty$, estos caminos convergen al Movimiento Browniano: "$B^{(\infty)}$". Algunas propiedades (heredadas del caso discreto):

- $B(0) = 0$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s)$.

Construcción del MB

Cuando $n \to \infty$, estos caminos convergen al Movimiento Browniano: "$B^{(\infty)}$". Algunas propiedades (heredadas del caso discreto):

- $B(0) = 0$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s)$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Construcción del MB

Cuando $n \to \infty$, estos caminos convergen al Movimiento Browniano: "$B^{(\infty)}$". Algunas propiedades (heredadas del caso discreto):

- $B(0) = 0$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s)$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
- $B = B(\cdot, \omega)$ es una función continua en todo $t \geq 0$.

Construcción del MB

Cuando $n \to \infty$, estos caminos convergen al Movimiento Browniano: "$B^{(\infty)}$". Algunas propiedades (heredadas del caso discreto):

- $B(0) = 0$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s)$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
- $B = B(\cdot, \omega)$ es una función continua en todo $t \geq 0$.
- $B = B(\cdot, \omega)$ es una función no diferenciable para todo $t \geq 0$.

Construcción del MB

Cuando $n \to \infty$, estos caminos convergen al Movimiento Browniano: "$B^{(\infty)}$". Algunas propiedades (heredadas del caso discreto):

- $B(0) = 0$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(s)$.
- Para $t \geq s \geq 0$, $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
- $B = B(\cdot, \omega)$ es una función continua en todo $t \geq 0$.
- $B = B(\cdot, \omega)$ es una función no diferenciable para todo $t \geq 0$.
- Se define $\{\mathcal{F}_t^B : t \geq 0\}$ como la filtración generada por B. Entonces B es una martingala bajo esta filtración; es decir, para $t \geq s \geq 0$, $\mathbf{E}[B(t) \mid \mathcal{F}_s^B] = B(s)$.

Variación Absoluta

Esto suena cansador para el caminante. ¿Qué tanto se desplaza en un tiempo T?

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos se mueve T metros.

Variación Absoluta

Esto suena cansador para el caminante. ¿Qué tanto se desplaza en un tiempo T?

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos se mueve T metros.
- Pensemos en $B^{(2)}$: en T segundos se mueve $2 \times T \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}T$ metros.

Variación Absoluta

Esto suena cansador para el caminante. ¿Qué tanto se desplaza en un tiempo T?

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos se mueve T metros.
- Pensemos en $B^{(2)}$: en T segundos se mueve $2 \times T \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}T$ metros.
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos se mueve $n \times T \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}T$ metros.

Variación Absoluta

Esto suena cansador para el caminante. ¿Qué tanto se desplaza en un tiempo T?

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos se mueve T metros.
- Pensemos en $B^{(2)}$: en T segundos se mueve $2 \times T \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}T$ metros.
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos se mueve $n \times T \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}T$ metros.
- $n \to \infty$ pone al caminante a desplazarse cada vez más en un tiempo fijo T.

Variación Absoluta

Esto suena cansador para el caminante. ¿Qué tanto se desplaza en un tiempo T?

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos se mueve T metros.
- Pensemos en $B^{(2)}$: en T segundos se mueve $2 \times T \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}T$ metros.
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos se mueve $n \times T \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}T$ metros.
- $n \to \infty$ pone al caminante a desplazarse cada vez más en un tiempo fijo T.
- Esta es la **Variación Absoluta**.

Variación Absoluta

Esto suena cansador para el caminante. ¿Qué tanto se desplaza en un tiempo T?

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos se mueve T metros.
- Pensemos en $B^{(2)}$: en T segundos se mueve $2 \times T \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}T$ metros.
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos se mueve $n \times T \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}T$ metros.
- $n \to \infty$ pone al caminante a desplazarse cada vez más en un tiempo fijo T.
- Esta es la **Variación Absoluta**.
- La Variación Absoluta del Movimiento Browniano es ∞ para todo T.

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.
- Para $n \to \infty$ esta suma es T.

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.
- Para $n \to \infty$ esta suma es T.
- Esta es la **Variación Cuadrática**.

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.
- Para $n \to \infty$ esta suma es T.
- Esta es la **Variación Cuadrática**.
- La Variación Cuadrática del Movimiento Browniano es T para todo T ... y **para todo camino**!

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.
- Para $n \to \infty$ esta suma es T.
- Esta es la **Variación Cuadrática**.
- La Variación Cuadrática del Movimiento Browniano es T para todo T ... y **para todo camino**!
    - $\langle B \rangle_t = t \ c.s.$

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.
- Para $n \to \infty$ esta suma es T.
- Esta es la **Variación Cuadrática**.
- La Variación Cuadrática del Movimiento Browniano es T para todo T ... y **para todo camino**!
  - $\langle B \rangle_t = t \; c.s.$
- Ya elevar al cubo sería muy drástico: la Variación Cúbica del Movimiento Browniano es 0 para todo T y para todo camino.

Variación Cuadrática

Sumar la distancia absoluta es muy drástico. Hay que medir distinto. Sumemos los cuadrados de los desplazamientos.

- Pensemos en $B^{(1)}$: en T segundos, esta suma es Tm^2 (suma de 1^2).
- Pensemos en $B^{(n)}$: en T segundos, esta suma es $n \times T \times \frac{1}{n} = Tm^2$.
- Para $n \to \infty$ esta suma es T.
- Esta es la **Variación Cuadrática**.
- La Variación Cuadrática del Movimiento Browniano es T para todo T ... y **para todo camino**!
  - $\langle B \rangle_t = t \; c.s.$
- Ya elevar al cubo sería muy drástico: la Variación Cúbica del Movimiento Browniano es 0 para todo T y para todo camino.
- Por cierto, ese "punto dulce" para el que no es mucho ni poco, es la *dimensión fractal* de un camino.

Teorema de Dambis, Dubins Schwarz (1965)

Theorem (DDS - Cambio de tiempo)

Sea M una martingala continua con $\langle M\rangle_\infty = \infty$. Definimos $T(s) = \inf\{t : \langle M\rangle_t > s\}$. Entonces $\{B(s) = M(T(s)),\ \mathcal{G}(s) = \mathcal{F}(T(s))\}$ es un MB. En adición, se tiene $M(t) = B(\langle M\rangle_t)$.

- El equivalente es que el mismo caminante ahora lanza la moneda en tiempos predecibles, pero no necesariamente cada segundo.
- Lo que hace el teorema es cambiar el reloj del caminante, para que se pueda interpretar como un lanzamiento cada segundo ... volviendo a la situación inicial.

Integral Browniana

- Imaginemos que una acción se mueve como un MB.
- Un trader puede invertir en la acción, y puede rebalancear.
- Digamos que en un tiempo t tiene $\delta(t)$ acciones.

Integral Browniana

- Imaginemos que una acción se mueve como un MB.
- Un trader puede invertir en la acción, y puede rebalancear.
- Digamos que en un tiempo t tiene $\delta(t)$ acciones.
- El PyG del trader puede aproximarse con $\sum \delta(t_k) \times \Delta B_k$
    - Se supone una discretización del tiempo en t_k.
    - $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$.

Integral Browniana

- Imaginemos que una acción se mueve como un MB.
- Un trader puede invertir en la acción, y puede rebalancear.
- Digamos que en un tiempo t tiene $\delta(t)$ acciones.
- El PyG del trader puede aproximarse con $\sum \delta(t_k) \times \Delta B_k$
  - Se supone una discretización del tiempo en t_k.
  - $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$.
- **Integral Browniana o Estocástica**: $PyG(t) = \int_0^T \delta(s) dB(s)$.

Integral Browniana

- Imaginemos que una acción se mueve como un MB.
- Un trader puede invertir en la acción, y puede rebalancear.
- Digamos que en un tiempo t tiene $\delta(t)$ acciones.
- El PyG del trader puede aproximarse con $\sum \delta(t_k) \times \Delta B_k$
  - Se supone una discretización del tiempo en t_k.
  - $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$.
- **Integral Browniana o Estocástica**: $PyG(t) = \int_0^T \delta(s) dB(s)$.
- Corresponde con integral como límite de una suma.
- Se suele acortar la escritura: $dPyG = \delta dB$.

Integral Browniana

- Imaginemos que una acción se mueve como un MB.
- Un trader puede invertir en la acción, y puede rebalancear.
- Digamos que en un tiempo t tiene $\delta(t)$ acciones.
- El PyG del trader puede aproximarse con $\sum \delta(t_k) \times \Delta B_k$
  - Se supone una discretización del tiempo en t_k.
  - $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$.
- **Integral Browniana o Estocástica**: $PyG(t) = \int_0^T \delta(s) dB(s)$.
- Corresponde con integral como límite de una suma.
- Se suele acortar la escritura: $dPyG = \delta dB$.

Theorem (Representación de Martingalas)

Para cualquier proceso estocástico continuo X $\mathcal{F}_s^B$−medible, existen procesos μ y σ tales que X puede escribirse como

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB(s).$$

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- La notación típicamente es: $dx = \mu dt + \sigma dB$.
- Es permitido "cambiar" ds por Δs para tener una intuición de lo que pasa:
  - En un periodo corto Δt se modelan el cambio de X como la suma de dos partes:
  - Drift: $\mu(t)\Delta t$.
  - Difusión: $\sigma(t)\Delta B$

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- La notación típicamente es: $dx = \mu dt + \sigma dB$.
- Es permitido "cambiar" ds por Δs para tener una intuición de lo que pasa:
    - En un periodo corto Δt se modelan el cambio de X como la suma de dos partes:
    - Drift: $\mu(t)\Delta t$.
    - Difusión: $\sigma(t)\Delta B$
- Profundicemos. Pensemos en funciones f y g. Pregunta: existirá un proceso X tal que $dX = f(X)dt + g(X)dB$?

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- La notación típicamente es: $dx = \mu dt + \sigma dB$.
- Es permitido "cambiar" ds por Δs para tener una intuición de lo que pasa:
  - En un periodo corto Δt se modelan el cambio de X como la suma de dos partes:
  - Drift: $\mu(t)\Delta t$.
  - Difusión: $\sigma(t)\Delta B$
- Profundicemos. Pensemos en funciones f y g. Pregunta: existirá un proceso X tal que $dX = f(X)dt + g(X)dB$?
- Esta es una **Ecuación Diferencial Estocástica** (SDE): $PyG(t) = \int_0^T \delta(s)dB(s)$.

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

- La notación típicamente es: $dx = \mu dt + \sigma dB$.
- Es permitido "cambiar" ds por Δs para tener una intuición de lo que pasa:
  - En un periodo corto Δt se modelan el cambio de X como la suma de dos partes:
  - Drift: $\mu(t)\Delta t$.
  - Difusión: $\sigma(t)\Delta B$
- Profundicemos. Pensemos en funciones f y g. Pregunta: existirá un proceso X tal que $dX = f(X)dt + g(X)dB$?
- Esta es una **Ecuación Diferencial Estocástica** (SDE): $PyG(t) = \int_0^T \delta(s)dB(s)$.
- Como en el estudio de ecuaciones diferenciales, esto es una ecuación con una incógnita, solo que la incógnita es un proceso estocástico continuo.

Valoración de Derivados

- Un derivado es un contrato financiero cuyos pagos se definen como función de un subyacente (p. ej., precio de una acción).
  - Ejemplo 1: un contrato forward es un compromiso de compra-venta futura a un precio pactado hoy.

Valoración de Derivados

- Un derivado es un contrato financiero cuyos pagos se definen como función de un subyacente (p. ej., precio de una acción).
  - Ejemplo 1: un contrato forward es un compromiso de compra-venta futura a un precio pactado hoy.
  - Ejemplo 2: una opción call (put) otorga el derecho de comprar (vender) en el futuro a un precio fijo.

Valoración de Derivados

- Un derivado es un contrato financiero cuyos pagos se definen como función de un subyacente (p. ej., precio de una acción).
    - Ejemplo 1: un contrato forward es un compromiso de compra-venta futura a un precio pactado hoy.
    - Ejemplo 2: una opción call (put) otorga el derecho de comprar (vender) en el futuro a un precio fijo.
- Tradicionalmente estos derivados se valoraban usando teoría microeconómica:
    - Estime el valor esperado del pago del derivado.
    - Traiga a valor presente.
    - Corrija por aversión al riesgo.

Valoración de Derivados

- Un derivado es un contrato financiero cuyos pagos se definen como función de un subyacente (p. ej., precio de una acción).
  - Ejemplo 1: un contrato forward es un compromiso de compra-venta futura a un precio pactado hoy.
  - Ejemplo 2: una opción call (put) otorga el derecho de comprar (vender) en el futuro a un precio fijo.
- Tradicionalmente estos derivados se valoraban usando teoría microeconómica:
  - Estime el valor esperado del pago del derivado.
  - Traiga a valor presente.
  - Corrija por aversión al riesgo.
- Esto dejaba muchas dudas:
  - Diferencias entre distribuciones de distintos agentes.
  - Si compradores y vendedores ajustan por riesgo, no habría equilibrio.
  - Poca o nula utilización de relación íntima entre derivado y subyacente.

Valoración de Derivados

- Black & Scholes y Merton (por allá en 1973) probaron utilizar a fondo la relación entre derivado y subyacente.
- Experimentaron con replicar el pago final del derivado usando el subyacente.
- El valor del derivado es el precio inicial de ese portafolio "replicante".
- No necesitaban ni la distribución del subyacente ni corregir por riesgo.
- Esto funciona en todo escenario, pero lo presentaron modelando el subyacente con un Movimiento Browniano Geométrico: $dS = \mu S dt + \sigma S dB$. Esto tiene como solución:

$$S(t) = S(0) exp^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}.$$

Valoración de Derivados

- Lo del portafolio replicante, cómo es?
  - Portafolio $= +1$ derivado, $-\frac{\partial \text{Derivado}}{\partial S}$ "acciones".
  - Este portafolio no tiene riesgo (impacto del MB). Luego debe tener igual dinámica que un activo libre de riesgo.
  - $\Rightarrow$ *Ecuación de Black-Scholes-Merton* para valorar derivado F, con pago final (tiempo T) $\Phi = \Phi(S(T))$:

$$F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx} + rxF_x - rF = 0, \quad F(T, y) = \Phi(y).$$

Valoración de Derivados

- Lo del portafolio replicante, cómo es?
    - Portafolio $= +1$ derivado, $-\frac{\partial \text{Derivado}}{\partial S}$ "acciones".
    - Este portafolio no tiene riesgo (impacto del MB). Luego debe tener igual dinámica que un activo libre de riesgo.
    - $\Rightarrow$ *Ecuación de Black-Scholes-Merton* para valorar derivado F, con pago final (tiempo T) $\Phi = \Phi(S(T))$:

$$F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx} + rxF_x - rF = 0, \quad F(T, y) = \Phi(y).$$

- μ no aparece!

Valoración de Derivados

- Lo del portafolio replicante, cómo es?
  - Portafolio $= +1$ derivado, $-\frac{\partial \text{Derivado}}{\partial S}$ "acciones".
  - Este portafolio no tiene riesgo (impacto del MB). Luego debe tener igual dinámica que un activo libre de riesgo.
  - $\Rightarrow$ *Ecuación de Black-Scholes-Merton* para valorar derivado F, con pago final (tiempo T) $\Phi = \Phi(S(T))$:

$$F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx} + rxF_x - rF = 0, \quad F(T, y) = \Phi(y).$$

- μ no aparece!
- Esto no se ve muy lindo, pero hay un truco elegantísimo.
- Recordar nuestro caminante aleatorio. Suponer ahora que los pasos no son simétricos: avanza $1.2m$ y retrocede $0.8m$.
- Si yo cambio la moneda a 40% Cara - 60% Sello, ahora en promedio el caminante se queda en el origen.

Valoración de Derivados

Theorem (Girsanov)

B MB bajo probabilidad $\mathbf{P}$, y α proceso adaptado.

$$\tilde{B}(t) := B(t) + \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Entonces existe una probabilidad $\tilde{\mathbf{P}}$, bajo la cual $\tilde{B}$ es un MB.

Uno puede cambiar modelo $dS = \mu Sdt + \sigma SdB$ por otro donde la acción crece a tasa libre de riesgo r: $dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{B}$ ($\tilde{B}$ MB).

Valoración de Derivados

Theorem (Girsanov)

B MB bajo probabilidad $\mathbf{P}$, *y α proceso adaptado.*

$$\tilde{B}(t) := B(t) + \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Entonces existe una probabilidad $\tilde{\mathbf{P}}$, *bajo la cual $\tilde{B}$ es un MB.*

Uno puede cambiar modelo $dS = \mu S dt + \sigma S dB$ por otro donde la acción crece a tasa libre de riesgo r: $dS = rSdt + \sigma S d\tilde{B}$ ($\tilde{B}$ MB). El valor inicial del derivado (solución a la pde BSM) es:

$$F(0, S(0)) = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}\Phi(S(T))].$$

Valoración de Derivados

Theorem (Girsanov)

B MB bajo probabilidad $\mathbf{P}$, y α proceso adaptado.

$$\tilde{B}(t) := B(t) + \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Entonces existe una probabilidad $\tilde{\mathbf{P}}$, bajo la cual $\tilde{B}$ es un MB.

Uno puede cambiar modelo $dS = \mu Sdt + \sigma SdB$ por otro donde la acción crece a tasa libre de riesgo r: $dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{B}$ ($\tilde{B}$ MB). El valor inicial del derivado (solución a la pde BSM) es:

$$F(0, S(0)) = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}\Phi(S(T))].$$

NOTA: ese valor esperado se hace con $\tilde{\mathbf{P}}$.

Valoración de Derivados

Theorem (Girsanov)

B MB bajo probabilidad $\mathbf{P}$, y α proceso adaptado.

$$\tilde{B}(t) := B(t) + \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Entonces existe una probabilidad $\tilde{\mathbf{P}}$, bajo la cual $\tilde{B}$ es un MB.

Uno puede cambiar modelo $dS = \mu S dt + \sigma S dB$ por otro donde la acción crece a tasa libre de riesgo r: $dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{B}$ ($\tilde{B}$ MB).
El valor inicial del derivado (solución a la pde BSM) es:

$$F(0, S(0)) = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-rT}\Phi(S(T))].$$

NOTA: ese valor esperado se hace con $\tilde{\mathbf{P}}$.
NOTA 2: la condición de "no arbitraje", fundamental en esta derivación, se refleja en que S crezca a una tasa r bajo esa *Probabilidad de Neutralidad al Riesgo* $\tilde{\mathbf{P}}$.

Valoración de Derivados

- Mundo “Renta Fija” (bonos y cosas así): igual pero diferente.
- Derivados en ese mundo (e.g., swaps) con frecuencia requieren factores de descuento a muchos plazos.

Valoración de Derivados

- Mundo "Renta Fija" (bonos y cosas así): igual pero diferente.
- Derivados en ese mundo (e.g., swaps) con frecuencia requieren factores de descuento a muchos plazos.
- Para portafolios, lo que se necesita es una curva de valoración.
- En ese mundo, el subyacente es la curva entera: infinitos subyacentes.

Valoración de Derivados

- Mundo "Renta Fija" (bonos y cosas así): igual pero diferente.
- Derivados en ese mundo (e.g., swaps) con frecuencia requieren factores de descuento a muchos plazos.
- Para portafolios, lo que se necesita es una curva de valoración.
- En ese mundo, el subyacente es la curva entera: infinitos subyacentes.
- Lo primero que se hizo fue plantear modelos para la tasa de corto plazo r:

$$dr = \alpha dt + \sigma dB.$$

- Factores de descuento: $DF(t, T) = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)ds}]$.

Valoración de Derivados

- Mundo "Renta Fija" (bonos y cosas así): igual pero diferente.
- Derivados en ese mundo (e.g., swaps) con frecuencia requieren factores de descuento a muchos plazos.
- Para portafolios, lo que se necesita es una curva de valoración.
- En ese mundo, el subyacente es la curva entera: infinitos subyacentes.
- Lo primero que se hizo fue plantear modelos para la tasa de corto plazo r:
$$dr = \alpha dt + \sigma dB.$$
- Factores de descuento: $DF(t,T) = \tilde{\mathbf{E}}[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)ds}]$.
- Problemas:
  - $\mathbf{E}$ vs. $\tilde{\mathbf{E}}$: no hay "receta" para plantear modelos para r que queden bajo la Prob. Neut. Riesgo.
  - Los modelos se deben calibrar a la curva de rendimientos.
  - FD a largo plazo: se debe simular hasta ese plazo.

Valoración de Derivados

- Tasas *forward*: tasa para préstamo desembolsable en el futuro. $f(0,\cdot)$ es la curva forward: una tasa para cada plazo.

Valoración de Derivados

- Tasas *forward*: tasa para préstamo desembolsable en el futuro. $f(0,\cdot)$ es la curva forward: una tasa para cada plazo.
- Un poco de álgebra arroja: $r(t) = \frac{\int_0^t f(0,s)}{t}$.
- HJM (1987 - mismo H asesor de la tesis) plantearon un modelo tipo BSM para la curva:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dB(t).$$

Esto es una difusión (B puede ser n-dimensional) para cada plazo T.

Valoración de Derivados

- Tasas *forward*: tasa para préstamo desembolsable en el futuro. $f(0,\cdot)$ es la curva forward: una tasa para cada plazo.
- Un poco de álgebra arroja: $r(t) = \frac{\int_0^t f(0,s)}{t}$.
- HJM (1987 - mismo H asesor de la tesis) plantearon un modelo tipo BSM para la curva:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dB(t).$$

  Esto es una difusión (B puede ser n-dimensional) para cada plazo T.
- Encontraron que para la curva sí hay una "receta" para evitar arbitraje. Bajo la Prob. Neut. Riesgo se debe cumplir:

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)du.$$

- Ventaja: (i) "Receta"; (ii) curva entra como punto inicial.
- Desventaja: hoyo negro computacional.

Mercado de Futuros

- Se supone dado un subyacente (p. ej., precio de un activo).
- Futuro: contrato de compra-venta futura con valor inicial 0, que se "marca a mercado" cada día.
- τ: horizonte final máximo.
- $F(t, T)$: Precios "futuros" (los que se pactarían en contratos futuros).
  - Se define $F(t, T) = F(T, T)$ para $t \in [T, \tau]$.

Mercado de Futuros

- Se supone dado un subyacente (p. ej., precio de un activo).
- Futuro: contrato de compra-venta futura con valor inicial 0, que se "marca a mercado" cada día.
- τ: horizonte final máximo.
- $F(t, T)$: Precios "futuros" (los que se pactarían en contratos futuros).
  - Se define $F(t, T) = F(T, T)$ para $t \in [T, \tau]$.
- Se puede transar futuros para todo $T \leq \tau$.

Mercado de Futuros

- Se supone dado un subyacente (p. ej., precio de un activo).
- Futuro: contrato de compra-venta futura con valor inicial 0, que se "marca a mercado" cada día.
- τ: horizonte final máximo.
- $F(t, T)$: Precios "futuros" (los que se pactarían en contratos futuros).
  - Se define $F(t, T) = F(T, T)$ para $t \in [T, \tau]$.
- Se puede transar futuros para todo $T \leq \tau$.
- Activos de la economía: "cuenta de ahorros" y portafolios de futuros.
- Un portafolio de futuros es un contrato futuro y el efectivo resultante de la actividad de liquidez del futuro (en la "cuenta de ahorros").
- $r(t)$: tasa de interés "spot" de muy, muy corto plazo.

Mercado de Futuros

M1

Para $0 \leq t \leq T \leq \tau$,

$$F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(s,T)d\mathbf{B}(s)',$$

donde $F(0,\cdot)$, α y $\boldsymbol{\sigma}$ son integrables y $\mathbf{B}$ es n-dimensional.

M2

Para $t \in [0,\tau]$,

$$r(t) = r_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \mathbf{b}(s)d\mathbf{B}(s)',$$

donde a y b son integrables.

Mercado de Futuros

Definition (Modelos de Futuros)

Un modelo de futuros $\mathcal{M}$ es un conjunto de

1. Una curva de futuros F que satisface $M1$.
2. Una tasa de interés spot r que satisface $M2$.
3. $\mathcal{T} \subset [0, \tau]$: plazos transables de futuros. Se supone al menos un plazo en $(0, \tau)$.
4. $T \leq \tau$: plazo final para transar. Si $\mathcal{T}$ es finito, $T \leq \min(\mathcal{T} \cap (0, \tau))$. Si no, $\mathcal{T}$ debe tener al menos n elementos mayores que T.

Trading en Mercados de Futuros

- Nota: el subyacente puede ser la misma tasa de interés spot $\Rightarrow$ se supone consistencia en los procesos.
- Trading en este mercado:

Trading en Mercados de Futuros

- Nota: el subyacente puede ser la misma tasa de interés spot $\Rightarrow$ se supone consistencia en los procesos.
- Trading en este mercado:
  - No hay fricciones (costos de transacción ,iliquidez, restricciones de venta en corto).

Trading en Mercados de Futuros

- Nota: el subyacente puede ser la misma tasa de interés spot $\Rightarrow$ se supone consistencia en los procesos.
- Trading en este mercado:
  - No hay fricciones (costos de transacción ,iliquidez, restricciones de venta en corto).
  - Se permite trading en la "cuenta de ahorros" y en portafolios de futuros.

Trading en Mercados de Futuros

- Nota: el subyacente puede ser la misma tasa de interés spot $\Rightarrow$ se supone consistencia en los procesos.
- Trading en este mercado:
  - No hay fricciones (costos de transacción ,iliquidez, restricciones de venta en corto).
  - Se permite trading en la "cuenta de ahorros" y en portafolios de futuros.
  - Si pongo \$1 en la cuenta de ahorros en $t = 0$, en $t = t$ tengo $A(t) = \$\exp \int_0^t r(s)ds$.

Trading en Mercados de Futuros

- Nota: el subyacente puede ser la misma tasa de interés spot $\Rightarrow$ se supone consistencia en los procesos.
- Trading en este mercado:
  - No hay fricciones (costos de transacción ,iliquidez, restricciones de venta en corto).
  - Se permite trading en la "cuenta de ahorros" y en portafolios de futuros.
  - Si pongo \$1 en la cuenta de ahorros en $t = 0$, en $t = t$ tengo $A(t) = \$ \exp \int_0^t r(s)ds$.
  - El precio Q de una unidad de un portafolio de futuros con madurez T es

$$Q(t, T) = F(t, T) - F(0, T) + \int_0^t Q(s, T)r(s)ds.$$

Trading en Mercados de Futuros

Definition (Estrategia de Trading)

Una estrategia de trading en un modelo de futuros $\mathcal{M}$ es una pareja $(\mathcal{R}, \psi)$ de plazos transables y posiciones tal que:

1. $\mathcal{R}$ es finito de tamaño M: $0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_M \leq T^{\mathcal{M}}$.
2. ψ es un proceso adaptado $M+1$-dimensional: posiciones en el futuro de cada plazo.
3. ψ satisface condiciones de integrabilidad.

- **Admisible**: no puede sostener pérdidas ilimitadas.
- **Auto-Financiada**: arranca con una plata, pero después no le entra ni sale.

Trading en Mercados de Futuros

- El proceso de riqueza de una Estrategia $\pi = (\mathcal{R}, \psi)$ es

$$V^{\pi}(t) = \psi_0(t)A(t) + \sum_{i=1}^{M} \psi_i(t)Q(t, T_i).$$

Trading en Mercados de Futuros

- El proceso de riqueza de una Estrategia $\pi = (\mathcal{R}, \psi)$ es

$$V^{\pi}(t) = \psi_0(t)A(t) + \sum_{i=1}^{M} \psi_i(t)Q(t, T_i).$$

- Si lo único que hago es "comprar" un futuro en $t \geq 0$, la riqueza en $s \in [t, T]$ es

$$V^{\pi}(s) = F(s, T) - F(t, T) + \int_t^s V^{\pi}(u)r(u)du.$$

Trading en Mercados de Futuros

- El proceso de riqueza de una Estrategia $\pi = (\mathcal{R}, \psi)$ es

$$V^{\pi}(t) = \psi_0(t)A(t) + \sum_{i=1}^{M} \psi_i(t)Q(t, T_i).$$

- Si lo único que hago es "comprar" un futuro en $t \geq 0$, la riqueza en $s \in [t, T]$ es

$$V^{\pi}(s) = F(s, T) - F(t, T) + \int_t^s V^{\pi}(u)r(u)du.$$

Se dice que un modelo de futuros admite **Arbitraje** si existe una estrategia autofinanciada $\pi = (\mathcal{R}, \psi)$ tal que

- $V^{\pi}(0) = 0$.

Trading en Mercados de Futuros

- El proceso de riqueza de una Estrategia $\pi = (\mathcal{R}, \psi)$ es

$$V^{\pi}(t) = \psi_0(t)A(t) + \sum_{i=1}^{M} \psi_i(t)Q(t, T_i).$$

- Si lo único que hago es "comprar" un futuro en $t \geq 0$, la riqueza en $s \in [t, T]$ es

$$V^{\pi}(s) = F(s, T) - F(t, T) + \int_t^s V^{\pi}(u)r(u)du.$$

Se dice que un modelo de futuros admite **Arbitraje** si existe una estrategia autofinanciada $\pi = (\mathcal{R}, \psi)$ tal que

- $V^{\pi}(0) = 0$.
- $\exists t \leq T^{\mathcal{M}}$ $V^{\pi}(t) \geq 0$, $\mathbf{P}[V^{\pi}(t) > 0] > 0$.

“Primer Teorema Fundamental”

Definition (Probabilidad Equivalente de Martingala - ELMM)

Una ELMM para un modelo de futuros $\mathcal{M}$ es una medida $\tilde{\mathbf{P}}$ equivalente a $\mathbf{P}$ tal que

$$\forall T \in \mathcal{T}^{\mathcal{M}} \ \frac{Q(t,T)}{B(t)} \text{ es una martingala (local).}$$

Theorem (Teorema 1a)

Considere $\mathcal{M}$, modelo de futuros. Si existe una ELMM para $\mathcal{M}$, entonces el modelo no admite arbitraje.

"Primer Teorema Fundamental"

El converso no es cierto: hay demasiados instrumentos transables. Pero casi es cierto.

Lemma

Existencia ELMM $\Leftrightarrow$ existencia de proceso (integrable) γ n-dimensional tal que

1. $\forall t \leq T^{\mathcal{M}}, T \in \mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ $\alpha(t,T) + \boldsymbol{\sigma}(t,T)\gamma' = 0.$
2. $\mathbf{E}[\exp \int_0^{T^{\mathcal{M}}} \gamma(t) d\mathbf{B}(t)' - \frac{1}{2}\int_0^{T^{\mathcal{M}}} \|\gamma(t)\|^2 dt] = 1.$

"Primer Teorema Fundamental"

Theorem (Teorema 1b)

Considere $\mathcal{M}$ modelo de futuros con $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ a los sumo contable. Si el modelo no admite arbitraje entonces existe un proceso (integrable) γ n-dimensional tal que

$$\forall t \leq T^{\mathcal{M}}, T \in \mathcal{T}^{\mathcal{M}} \ \alpha(t,T) + \boldsymbol{\sigma}(t,T)\gamma' = 0$$

.

Esto plantea "receta" para modelos futuros: si quiere trabajar en la probabilidad de neutralidad al riesgo, el "drift" de la curva de futuros debe ser 0.

"Segundo Teorema Fundamental"

Definimos un modelo de futuros $\mathcal{M}$ *estándar* si no admite arbitraje, $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ es a lo sumo contable y el proceso γ satisface las condiciones del Lema.
Se toma una ELMM $\tilde{\mathbf{P}}^{\mathcal{M}}$ (existencia por resultados anteriores).

Definition (Modelos Completos)

Un modelo estándar es *completo* si $\forall T \in \mathcal{T}^{\mathcal{M}}$, X v.a. $\mathcal{F}_T-$medible acotada abajo y con $x_0 = \tilde{\mathbf{E}}\left[\frac{X}{A(T)}\right]$, existe una Estrategia $(\mathcal{R}, \psi)$ tal que $V^{\pi}(0) = x_0$ y $V^{\pi}(T) = X$.

"Segundo Teorema Fundamental"

Theorem (Teorema 2)

Sea $\mathcal{M}$ un modelo estándar con $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ finito. Las siguientes son equivalentes:

1. *$\mathcal{M}$ es completo.*
2. *Existe una única ELMM para $\mathcal{M}$.*
3. *Existe un único proceso (en L^2) γ que satisface las tres condiciones del Teorema 1b.*

“Segundo Teorema Fundamental”

Theorem (Teorema 2 (b))

Sea $\mathcal{M} = \{F^{\mathcal{M}}, r^{\mathcal{M}}, \mathcal{T}^{\mathcal{M}}, T^{\mathcal{M}}\}$ un modelo de futuros estándar. Entonces $\mathcal{M}$ es completo si y solo si existe $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ con $\mathcal{R}$ finito y $\min \mathcal{R} \geq T^{\mathcal{M}}$ tal que $\mathcal{M}^* = \{F^{\mathcal{M}}, r^{\mathcal{M}}, \mathcal{R}, T^{\mathcal{M}}\}$ es completo.

La cantidad de instrumentos transables vuelve a ser problema en el caso infinito. De hecho, se puede construir un ejemplo de un modelo con $\mathcal{T}^{\mathcal{M}}$ contable y una única ELMM, que no es completo.

Modelos Futuros Lineales

- Para valorar derivados, sabemos que un modelo de futuros es $dF(t, T) = \boldsymbol{\sigma}(t, T)d\mathbf{B}(t)'$.

Modelos Futuros Lineales

- Para valorar derivados, sabemos que un modelo de futuros es $dF(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)d\mathbf{B}(t)'$.
- Sigue siendo muy amplio: estudiemos casos con $\boldsymbol{\sigma}(t,T) = (K_1F(t,T) + K_2)\boldsymbol{\rho}(t,T)$, con $\boldsymbol{\rho}(t,T)$ determínistico (y ciertas condiciones de integrabilidad).

Modelos Futuros Lineales

- Para valorar derivados, sabemos que un modelo de futuros es $dF(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)d\mathbf{B}(t)'$.
- Sigue siendo muy amplio: estudiemos casos con $\boldsymbol{\sigma}(t,T) = (K_1F(t,T) + K_2)\boldsymbol{\rho}(t,T)$, con $\boldsymbol{\rho}(t,T)$ determínistico (y ciertas condiciones de integrabilidad).
- Nota: varios $\boldsymbol{\rho}$ podrían dar el "mismo modelo" (en distribución - teorema de rotación de los ρ).

Modelos Futuros Lineales

- Para valorar derivados, sabemos que un modelo de futuros es $dF(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)d\mathbf{B}(t)'$.
- Sigue siendo muy amplio: estudiemos casos con $\boldsymbol{\sigma}(t,T) = (K_1F(t,T) + K_2)\boldsymbol{\rho}(t,T)$, con $\boldsymbol{\rho}(t,T)$ determínistico (y ciertas condiciones de integrabilidad).
- Nota: varios $\boldsymbol{\rho}$ podrían dar el "mismo modelo" (en distribución - teorema de rotación de los ρ).
- $K_1 = 0$: modelo Gaussiano.
- $K_1 = 1$: $F(t,T) = (F(0,T) + K_2) \times \exp\left\{\int_0^t \boldsymbol{\rho}(s,T)d\boldsymbol{B}(s)' - \frac{1}{2}\int_0^t \|\boldsymbol{\rho}(s,T)\|^2 ds\right\} - K_2$.

Modelos Futuros Lineales

- Para valorar derivados, sabemos que un modelo de futuros es $dF(t,T) = \boldsymbol{\sigma}(t,T)d\mathbf{B}(t)'$.
- Sigue siendo muy amplio: estudiemos casos con $\boldsymbol{\sigma}(t,T) = (K_1 F(t,T) + K_2)\boldsymbol{\rho}(t,T)$, con $\boldsymbol{\rho}(t,T)$ determínistico (y ciertas condiciones de integrabilidad).
- Nota: varios $\boldsymbol{\rho}$ podrían dar el "mismo modelo" (en distribución - teorema de rotación de los ρ).
- $K_1 = 0$: modelo Gaussiano.
- $K_1 = 1$: $F(t,T) = (F(0,T) + K_2) \times \exp\left\{\int_0^t \boldsymbol{\rho}(s,T)d\boldsymbol{B}(s)' - \frac{1}{2}\int_0^t \|\boldsymbol{\rho}(s,T)\|^2 ds\right\} - K_2$.
- Para valorar derivados: $x_0 = \mathbf{E}\left[\frac{X_{Final}}{A(T)}\right]$.
- Todavía es muy costoso computacionalmente.

Modelos Futuros Exponenciales

- Idea de Heath: "volatilidades exponenciales".

$$\rho_i(t, T) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \exp\{-\lambda_j(T - t)\}.$$

- Esto define una base densa en las funciones plausibles para $\boldsymbol{\sigma}$.

Modelos Futuros Exponenciales

- Idea de Heath: "volatilidades exponenciales".

$$\rho_i(t, T) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \exp\{-\lambda_j(T - t)\}.$$

- Esto define una base densa en las funciones plausibles para $\boldsymbol{\sigma}$.
- Se puede simplificar mucho. Definir variables de estado Z:

Modelos Futuros Exponenciales

- Idea de Heath: "volatilidades exponenciales".

$$\rho_i(t, T) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \exp\{-\lambda_j(T - t)\}.$$

- Esto define una base densa en las funciones plausibles para $\boldsymbol{\sigma}$.
- Se puede simplificar mucho. Definir variables de estado Z:

$$Z_j(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} e^{-\lambda_j(t-s)} dB_i(s), \ j = 1, \ldots, m.$$

$$dZ_j(t) = -\lambda Z_j(t)dt + \boldsymbol{\beta_j} d\mathbf{B}(t)^{'}.$$

- $K_1 = 0 : F(t, T) = F(0, T) + \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda_j(T-t)} Z_j(t).$
- $K_1 = 1 :$
  $F(t, T) = (F(0, T) + K_2) \times \exp\{\sum_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j(T-t)} Z_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\gamma_j k}{\lambda_j + \lambda_k} (e^{(\lambda_j+\lambda_k)(T-t)} - e^{(\lambda_j+\lambda_k)T})\} - K_2.$

Modelos Futuros de la Tasa Spot

- Se puede suponer (sin perder generalidad), $m = n$ (rotación de variables para quitar dimensiones brownianas o introducción más dimensiones brownianas).
- Esto permite construir modelos tri-dimensionales, que se describen con tres variables de estado.
- Subyacente: tasa libre de riesgo spot.
- Comparaciones:

$$
\begin{aligned}
r(t) &= F(t,t) = f(t,t) \\
F(t,T) &= \mathbf{E}[r(T)|\mathcal{F}]_t] \\
f(t,T) &= \frac{\mathbf{E}[r(T)\exp\{-\int_t^T r(s)ds\}|\mathcal{F}]_t]}{\mathbf{E}[\exp\{-\int_t^T r(s)ds\}|\mathcal{F}]_t]}.
\end{aligned}
$$

Valoración de Derivados con Modelos Exponenciales de la Tasa Spot

- El valor de un derivado europeo solo depende de esas variables de estado Z.
- $V(t) = V(t, Z_1(t), \ldots, Z_m(t)), \;\; V(T) = X.$
- Metodología 1:
  $V(t, z_1, \ldots, z_m) = \mathbf{E}[e^{\int_t^T F(u,u)du} X | Z_1(t) = z_1, \ldots].$
- Metodología 2: por medio de lema de Itô, estilo BSM, pde

$$V_t = rV + \sum_j \lambda_j z_j V_{z_j} + \sum_{j,k} \gamma_{jk} V_{z_j z_k}, \;\; V(T) = X.$$

Relación con Modelos Tradicionales

- Hull White:

$$dr_t = (\alpha_t - \beta_t r_t)dt + \sigma_t dB_t : \; dF(t,T) = e^{-\int_t^T \beta_s ds} \sigma_t dB_t.$$

- Cox Ingersoll Ross:

$$dr_t = (\alpha_t - \beta_t r_t)dt + \sigma_t \sqrt{r_t} dB_t : \; dF(t,T) = e^{-\int_t^T \beta_s ds} \sigma_t \sqrt{F(t,t)} dB$$

- Black Karasinski:

$$d \ln r_t = (\alpha_t - \beta_t \ln r_t)dt + \sigma_t dB_t : \; dF(t,T) = e^{-\int_t^T \beta_s ds} \sigma_t F(t,T) dB$$

Spot vs. HJM vs. Futuros

1. Los tres son (casi) lo mismo teóricamente.
2. Spot: necesidad de calcular drifts. En los otros dos, solo se necesita volatilidad.
3. Valoración inmediata de bonos: HJM sí, Futuros casi, Spot no (se debe calibrar a curva inicial) y debe modelar hasta último plazo analizado.
4. PDEs: Spot y futuros sí; HJM muy difícilmente (dimensionalidad).
5. Número Factores: Futuros, muchos (tres, cuatro); HJM no más de dos, usando unas cinco variables de estado.
6. Condición inicial: Spot, solo una tasa (pobre calibración); HJM y Futuros: toda la curva (mejor calibración).

Pregunta Motivacional

- Modelos HJM (curvas forward) se calibran solo con una estructura de volatilidad.
- Pero pareciera que (por rotaciones) lo importante es la matriz de covarianza.
- Es decir, que dos modelos con volatilidades que tengan la misma covarianza, deben ser "el mismo modelo".
- En los modelos lineales de futuros, se encontró (teorema) que si dos modelos tienen la misma estructura de covarianza, entonces som el mismo modelo.
- Es este resultado general?

Teorema de Lévy

- Recordar variación cuadrática:
- $\langle B \rangle_t = t \ c.s.$

Teorema de Lévy

- Recordar variación cuadrática:
- $\langle B \rangle_t = t \; c.s.$
- Podría otro caminante aleatorio (con una moneda distinta, o con saltos distintos) presentar la misma variación cuadrática? No!

Teorema de Lévy

- Recordar variación cuadrática:
- $\langle B \rangle_t = t$ c.s.
- Podría otro caminante aleatorio (con una moneda distinta, o con saltos distintos) presentar la misma variación cuadrática? No!

Theorem (Lévy, 1948)

Sea M una martingala continua (cuadrado-integrable) tal que $\langle M \rangle_t = t$. Entonces M es un MB.

Teorema de Lévy

- Recordar variación cuadrática:
- $\langle B \rangle_t = t$ $c.s.$
- Podría otro caminante aleatorio (con una moneda distinta, o con saltos distintos) presentar la misma variación cuadrática? No!

Theorem (Lévy, 1948)

Sea M una martingala continua (cuadrado-integrable) tal que $\langle M \rangle_t = t$. Entonces M es un MB.

Pregunta: pueden existir dos procesos continuos “distintos” X y Y con la “misma” VC?

Caracterización de Procesos con VC

- Primera respuesta (Lévy): si la VC es t, entonces **negativo**.

Caracterización de Procesos con VC

- Primera respuesta (Lévy): si la VC es t, entonces **negativo**.
- Segunda respuesta: si la VC es determinística, entonces **negativo**. (Combinar Lévy con el cambio de tiempo DDS).

Caracterización de Procesos con VC

- Primera respuesta (Lévy): si la VC es t, entonces **negativo**.
- Segunda respuesta: si la VC es determinística, entonces **negativo**. (Combinar Lévy con el cambio de tiempo DDS).
- Tercera respuesta, **afirmativo**: $X = B^2 - t$ y $Y = -X$. Entonces X y Y tienen distribución distinta: $\mathbf{P}(X(t) > t) > 0 = \mathbf{P}(Y(t) > t)$. Pero

$$\langle X \rangle_t = \langle Y \rangle_t = \int_0^t 4B(s)^2 ds.$$

La tesis presenta dos resultados alrededor de esta pregunta:

Caracterización de Procesos con VC

- Primera respuesta (Lévy): si la VC es t, entonces **negativo**.
- Segunda respuesta: si la VC es determinística, entonces **negativo**. (Combinar Lévy con el cambio de tiempo DDS).
- Tercera respuesta, **afirmativo**: $X = B^2 - t$ y $Y = -X$. Entonces X y Y tienen distribución distinta: $\mathbf{P}(X(t) > t) > 0 = \mathbf{P}(Y(t) > t)$. Pero

$$\langle X \rangle_t = \langle Y \rangle_t = \int_0^t 4B(s)^2 ds.$$

La tesis presenta dos resultados alrededor de esta pregunta:

1. Si la distribución de un proceso es caracterizado por la distribución de su VC, entonces el proceso es Gaussiano (converso de la segunda respuesta).

Caracterización de Procesos con VC

- Primera respuesta (Lévy): si la VC es t, entonces **negativo**.
- Segunda respuesta: si la VC es determinística, entonces **negativo**. (Combinar Lévy con el cambio de tiempo DDS).
- Tercera respuesta, **afirmativo**: $X = B^2 - t$ y $Y = -X$. Entonces X y Y tienen distribución distinta: $\mathbf{P}(X(t) > t) > 0 = \mathbf{P}(Y(t) > t)$. Pero

$$\langle X \rangle_t = \langle Y \rangle_t = \int_0^t 4B(s)^2 ds.$$

La tesis presenta dos resultados alrededor de esta pregunta:

1. Si la distribución de un proceso es caracterizado por la distribución de su VC, entonces el proceso es Gaussiano (converso de la segunda respuesta).
2. Para procesos solución de una SDE general, entonces **casi**: si dos procesos tienen igual distribución de VC, entonces los procesos son el mismo, módulo un signo negativo.

Conjuntos de Martingalas Continuas

- $\mathcal{D}$, Divergentes: $\langle M \rangle_\infty = \infty$.
- $\mathcal{G}$, Gaussianas: distribuciones finito-dimensionales que son Gaussianas.
- $\mathcal{E}$, Extremas: su distribución no es una combinación convexa de otras medidas bajo las cuales también son martingalas.
- $\mathcal{P}$, Puras: $X \in \mathcal{D}$ es pura si $\mathcal{F}^X_\infty = \mathcal{F}^B_\infty$, donde B es el MB DDS de X.
- $\mathcal{O}$, Ocone (1993): $X \in \mathcal{D}$ es Ocone si su MB DDS es independiente de $\langle X \rangle$.
- $\mathcal{U}$, Únicas: X es Única si para toda martingala Y, $\langle X \rangle \stackrel{d}{=} \langle Y \rangle$ implica $X \stackrel{d}{=} Y$.

La tesis introduce $\mathcal{U}$, y busca caracterizar $\mathcal{U}$ de alguna forma.

Conjuntos de Martingalas Continuas

- Proposición: $X \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \langle X \rangle_t$ es determinístico.

Conjuntos de Martingalas Continuas

- Proposición: $X \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \langle X \rangle_t$ es determinístico.

Theorem (Ocone, 1993)

Tomemos $X \in \mathcal{D}$. Entonces $X \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \{\int_0^t \epsilon_s dX_s\} \stackrel{d}{=} X$ para todo proceso determinístico ϵ tal que $|\epsilon| = 1$.

Conjuntos de Martingalas Continuas

- Proposición: $X \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \langle X \rangle_t$ es determinístico.

Theorem (Ocone, 1993)

Tomemos $X \in \mathcal{D}$. Entonces $X \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \{\int_0^t \epsilon_s dX_s\} \stackrel{d}{=} X$ para todo proceso determinístico ϵ tal que $|\epsilon| = 1$.

- Corolario: $X \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in \mathcal{O}$.

Conjuntos de Martingalas Continuas

- Proposición: $X \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \langle X \rangle_t$ es determinístico.

Theorem (Ocone, 1993)

Tomemos $X \in \mathcal{D}$. Entonces $X \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \{\int_0^t \epsilon_s dX_s\} \stackrel{d}{=} X$ para todo proceso determinístico ϵ tal que $|\epsilon| = 1$.

- Corolario: $X \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in \mathcal{O}$.

Theorem (Tesis, 1999)

Tomemos $X \in \mathcal{D}$ con $\frac{d\langle X \rangle_t}{dt} > 0$. Entonces $X \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in \mathcal{G}$.

O sea, a grosso modo, $\mathcal{U} = \mathcal{G}$.

Conjuntos de Martingalas Continuas

Otros resultados relacionados:

- Teorema: $\mathcal{G} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

Conjuntos de Martingalas Continuas

Otros resultados relacionados:

- Teorema: $\mathcal{G} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.
- Teorema (Vostrikova & Yor 1999): $\mathcal{O} \cap \mathcal{E} = \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$.

Conjuntos de Martingalas Continuas

Otros resultados relacionados:

- Teorema: $\mathcal{G} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.
- Teorema (Vostrikova & Yor 1999): $\mathcal{O} \cap \mathcal{E} = \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$.
- Proposición (Tesis, 1999): sea X una solución de $X_0 = 0,\ dX_t = g(X_t)dB_t$, donde g es función medible distinta de 0. $X \in \mathcal{D} \Rightarrow X \in \mathcal{P}$.

Equivalencia de SDEs

Para avanzar, se analiza la "equivalencia" de SDEs.

Theorem (Tesis, 1999)

$g_{i,j} : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ medibles, $\mathbf{g}_{d\times n}$. Para cada t y $\mathbf{x}$ se diagonaliza:

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{x})\mathbf{g}(t,\mathbf{x})' = P(t,\mathbf{x})\Lambda(t,\mathbf{x})P(t,\mathbf{x})',$$

con $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ (ordenados descendentemente). Para una distribución inicial μ para $\mathbf{M}_0$, considere ecuaciones

$$d\mathbf{M}_t = b(t,\mathbf{M}_t)dt + P(t,\mathbf{M}_t)\Lambda(t,\mathbf{M}_t)^{0.5}dB(t)' \quad (1)$$

$$d\mathbf{M}_t = b(t,\mathbf{M}_t)dt + g(t,\mathbf{M}_t)dB(t)' \quad (2)$$

Si X es una solución de (1), existe una solución $\tilde{X}$ de (2) con igual distribución que X; y viceversa. Nota: los MB de (1) y (2) son de dimensión d y n.

Soluciones de SDEs

Para una función medible f en $\mathbb{R}$, se definen

$$I(f) = \{x \in \mathbb{R} : \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{dy}{f^2(x+y)} = \infty \ \forall \epsilon > 0\}$$
$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

Theorem (Engelbert & Schmidt, 1984)

Para toda distribución inicial μ, la SDE $dX_t = g(X_t)dB_t$ tiene una solución única (en distribución) si y solo si $I(g) = Z(g)$.

Teorema

Theorem (Tesis, 1999)

Sean $g_1, \; g_2$ *funciones medibles en* $\mathbb{R}$ *con* $I(g_i) = Z(g_i)$. *Considere las ecuaciones*

$$X_0 = 0 \quad dX_t = g_1(X_t)dB(t) \tag{3}$$

$$X_0 = 0 \quad dX_t = g_2(X_t)dB(t). \tag{4}$$

Sean $X^{(1)}, X^{(2)}$ *soluciones de (3) y (4), respectivamente.*
$\langle X^{(1)} \rangle_t \overset{d}{=} \langle X^{(2)} \rangle_t \Rightarrow X^{(1)} \overset{d}{=} X^{(2)}$ *ó* $X^{(1)} \overset{d}{=} -X^{(2)}$.

Ejemplo

Example

Sea $g_1(x) = |x| + 1$, y X una solución de (3). Al ser g_1 par, $X \stackrel{d}{=} -X$. Por el teorema, ninguna otra solución de (3) puede tener VC con igual distribución que $\langle X \rangle$. Pero $X \in \mathcal{D}$ y X no es Gaussiana. Por el primer teorema, debe existir otra martingala Y con diferente distribución que X, pero tal que $\langle X \rangle_t \stackrel{d}{=} \langle Y \rangle_t$. Por el Teorema de Ocone, y otros resultados anteriores, se puede demostrar que una tal martingala es (fijando un $a > 0$)

$$Y_t = \begin{cases} X_t, & \text{si } t < a \\ 2X_a - X_t & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

References

Revuz & Yor (1991)
Continuous Martingales and Brownian Motion
Springer.

Karatzas & Shreve (1991)
Brownian Motion and Stochastic Calculus
Springer.

Ocone (1993)
A Symmetry Characterization of Conditionally Independent Increment Martingales
Proceedings of San Felice Workshop on Stochastic Analysis.

Vostrikova & Yor (1999)
Some Invariance Properties (of the Laws) of Ocone's Martingales.

Heath & Jara (1999)
Term structure Models Based on Futures Prices

Gracias