



# EVALUATING PROBABILISTIC FORECASTING ALGORITHMS FOR HIERARCHICAL TIME SERIES

Seminario de matemáticas aplicadas – Quantil

19-11-2020

Cristian Urbano (ccurbano@icesi.edu.co)

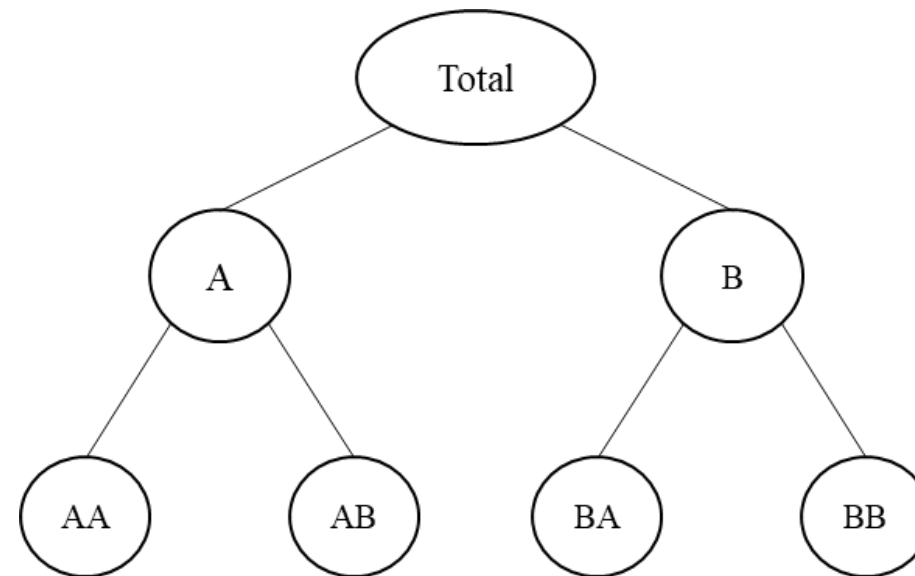
Julio César Alonso

# Agenda

1. Introducción
2. Revisión de literatura
3. Nuestro experimento
4. Resultados
5. Comentarios finales

# Series de tiempo jerárquicas (HTS)

Figure 1.1. A simple three-level hierarchy scheme



- Estructura de datos agrupada y ordenada

# Algoritmos de reconciliación

- Se puede extraer más información acerca del comportamiento de cada serie de tiempo si se tiene en cuenta la correlación entre los niveles y las series en una estructura HTS. Se usan algoritmos de reconciliación.
- Al mismo tiempo, estos algoritmos permiten que los pronósticos sean coherentes, al igual que los datos originales.

# ¿Por qué usar pronósticos jerárquicos?

- Athanasopoulos et al. (2017) y Yang et al. (2017) demuestran que la reconciliación mejora los pronósticos en jerarquías temporales.
- Taieb et al. (2020) y Athanasopoulos et al. (2009) muestran que los algoritmos para HTS mejoran los pronósticos para jerarquías geográficas.
- Smith & Vahey (2016), van Erven & Cugliari (2015), Athanasopoulos et al. (2019), Almeida et al. (2016), Villegas & Pedregal (2018), Shang & Hyndman (2017) encuentran beneficios a utilizar algoritmos de reconciliación para pronósticos de diversas agregaciones en temas como redes de energía, energía solar, PIB, cadenas de suministros, turismo y mortalidad.

Pero se concentra en pronósticos puntuales...

# Pronósticos probabilísticos

- Generan una predicción de toda la distribución de las series.
- Permiten calcular intervalos de confianza.
- Son una medida de la incertidumbre.
  
- Gamakumara et al. (2018) y Athanasopoulos et al. (2019) para HTS

# Objetivo

Pronósticos puntuales para series de tiempo jerárquicas

Pronósticos probabilísticos (intervalos de confianza)



Pronósticos probabilísticos para series de tiempo jerárquicas



# Objetivo

Evaluar el desempeño de diferentes algoritmos para la construcción de pronósticos probabilísticos en series de tiempo jerárquicas.

# Revisión de literatura

Pronósticos puntuales para series de tiempo jerárquicas

Pronósticos probabilísticos (intervalos de confianza)

```
graph TD; A[Pronósticos puntuales para series de tiempo jerárquicas] --- B[Pronósticos probabilísticos (intervalos de confianza)]; B --> C[Pronósticos probabilísticos para series de tiempo jerárquicas];
```

Pronósticos probabilísticos para series de tiempo jerárquicas

# Pronósticos puntuales para HTS

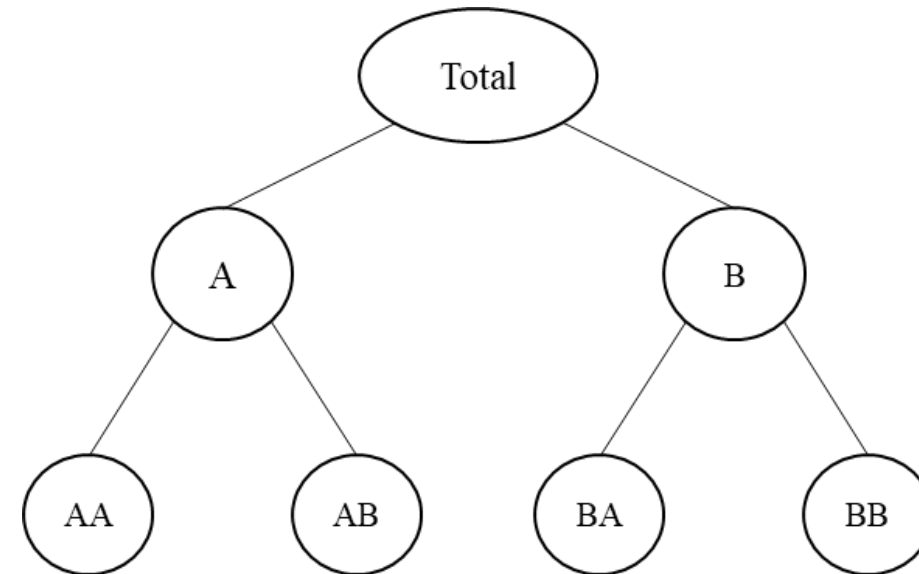
- Pronósticos individuales
  - Top-down
  - Bottom-up
  - Middle-out
- Optimal combination (Hyndman et al. (2011))
- MinT (Wickramasuriya et al. (2019))

# Pronósticos puntuales para HTS

$$y_i = S y_L$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_L = \begin{bmatrix} y_{AA} \\ y_{AB} \\ y_{BA} \\ y_{BB} \end{bmatrix}$$



$m$ : número de series en total

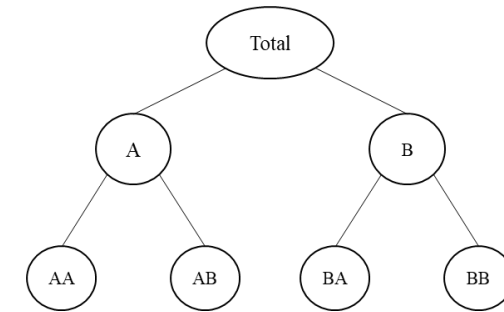
$k$ : número de series en el nivel más bajo

# Pronósticos puntuales para HTS

Matriz de mapeo

$$\tilde{y}_h = SP \hat{y}_h \rightarrow \text{Pronósticos base}$$

Matriz de agregación



$$\text{BU: } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera se pueden generar pronósticos de todo tipo.

# Pronósticos puntuales para HTS

## Optimal combination (Hyndman et al. (2011))

Modelo de regresión:  $\hat{y}_{T+h} = S \beta_{T+h} + \varepsilon_h$  donde  $\beta_{T+h} = E[y|y_1, \dots, y_T]$

$\varepsilon_h$  es el término de error de coherencia con varianza  $Var(\varepsilon_h) = \Sigma_h$

Estimador GLS:  $\tilde{y}_h = S(S'\Sigma_h^{-1}S)^{-1}S'\Sigma_h^{-1}\hat{y}_h$

$\Sigma_h$  no tiene rango completo. Se evade la estimación estableciendo que es una constante positiva  $k_h I_m$ .

# Pronósticos puntuales para HTS

## MinT (Wickramasuriya et al. (2019))

Se define que

$$\begin{aligned}\hat{e} &= y - \hat{y} \\ \tilde{e} &= y - \tilde{y}\end{aligned}$$

Si  $Var(\hat{e}) = W_h$ , entonces  $Var(\tilde{e}) = SPW_hP'S'$

Se busca la matriz P que minice la varianza (traza de  $Var(\tilde{e})$ )

$$\begin{aligned}P &= (S'W_h^{-1}S)^{-1}S'W_h^{-1} \\ \tilde{y}_h &= S(S'W_h^{-1}S)^{-1}S'W_h^{-1}\hat{y}_h\end{aligned}$$

# Pronósticos puntuales para HTS

Para definir  $W_h$

**OLS:**  $W_h = k_h I_m$

**WLS:**  $W_h = k_h \text{diag}(\widehat{W}_1)$ ,  $\widehat{W}_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{e}_t \hat{e}_t'$

**MinT:**  $W_h = k_h \widehat{W}_1^D$ ,  $\widehat{W}_1^D = \lambda_D \text{diag}(\widehat{W}_1) + (1 - \lambda_D) \widehat{W}_1$

$$\hat{\lambda}_D = \frac{\sum_{i \neq j} \widehat{Var}(\hat{r}_{ij})}{\sum_{i \neq j} \hat{r}_{ij}^2}$$



# Revisión de literatura

Pronósticos puntuales para series de tiempo jerárquicas

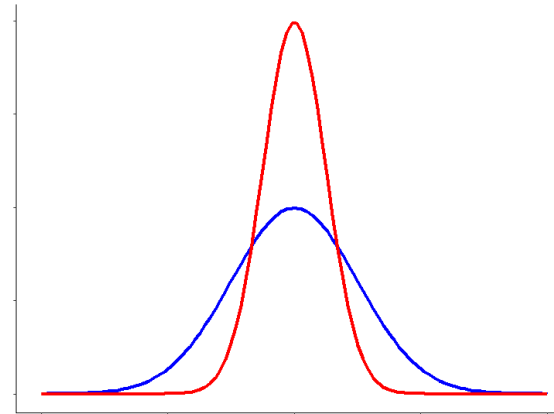
Pronósticos probabilísticos (intervalos de confianza)

```
graph TD; A[Pronósticos puntuales para series de tiempo jerárquicas] --- B[Pronósticos probabilísticos (intervalos de confianza)]; B --- C[Pronósticos probabilísticos para series de tiempo jerárquicas];
```

Pronósticos probabilísticos para series de tiempo jerárquicas

# Pronósticos probabilísticos

- Gneiting & Rajan (2013)
- Gneiting & Katzfuss (2014)
  - Calibración  $\rightarrow \mathcal{F} \sim Y$
  - Concentración (Sharpness)  $\rightarrow$



“The sharper, the better, provided the predictive distributions are calibrated.”

# Pronósticos probabilísticos para HTS

Gamakumara et al. (2018) propone un método derivado de Wickramasuriya et al. (2019). En el marco gaussiano, se mantienen las propiedades de MinT.

Athanasopoulos et al. (2019) propone usar bootstrapping para inferir la distribución de los errores. Computa

$$\hat{y}^b = \hat{y} + e^b$$

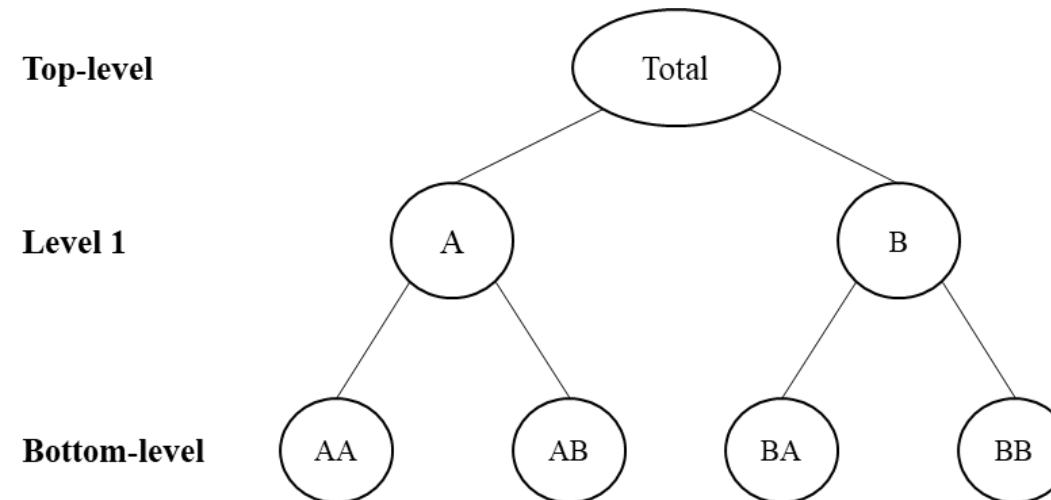
donde  $e^b$  son los errores reconstruidos.

Pero poco sabemos sobre como se comporta  
cada algoritmo...

# Experimento

- Simulaciones de Monte Carlo

Figure 4.1. Graphical scheme for the hierarchical structure used in simulations



# Experimento

4 series  $ARIMA(p, d, q)$

- $p$  y  $q$  pueden ser 0, 1 o 2 con igual probabilidad.
- $d$  puede ser 0 o 1 con igual probabilidad.

Table 4.1. Parameter space for A.R. and M.A. components

$AR(p)$ component		
Coefficient	$AR(1)$	$AR(2)$
$\phi_1$	[0.5, 0.7]	$[\phi_2 - 0.9, 0.9 - \phi_2]$
$\phi_2$		[0.5, 0.7]
$MA(q)$ component		
Coefficient	$MA(1)$	$MA(2)$
$\theta_1$	[0.5, 0.7]	$[-(0.9 + \theta_2)/3.2, (0.9 + \theta_2)/3.2]$
$\theta_2$		[0.5, 0.7]

Source: Adapted from Wickramasuriya et al. (2019)

Distribución normal multivariada con media 0 y covarianza contemporánea del error

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

# Experimento

- $T = 60$ ,  $T = 180$ , y  $T = 300$
- $h = 1$
- Pronósticos base se generan con modelos ARIMA y ETS.
- Se generan las métricas de evaluación.
- Se repite el proceso 10,000 veces.

# Métricas

- Pronósticos puntuales: RMSE y MAE

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y - \check{y})^2}$$

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y - \check{y}|$$



# Métricas

- Pronósticos probabilísticos: CRPS, ES, VS

$$CRPS(F_i, y_i) = E_F(|\check{y}_{i,h} - y_{i,h}|) - \frac{1}{2} E_F(|\check{y}_{i,h} - \check{y}_{i,h}^*|)$$

$$ES(F, y) = E_F(\|\check{y}_h - y_h\|^\alpha) - \frac{1}{2} E_F(\|\check{y}_h - \check{y}_h^*\|^\alpha)$$

$$VS(F, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{i,j} \left( |y_i - y_j|^p - E_{\check{y}_i, \check{y}_j}(|\check{y}_i - \check{y}_j|^p) \right)$$

# Métricas

## Skill scores

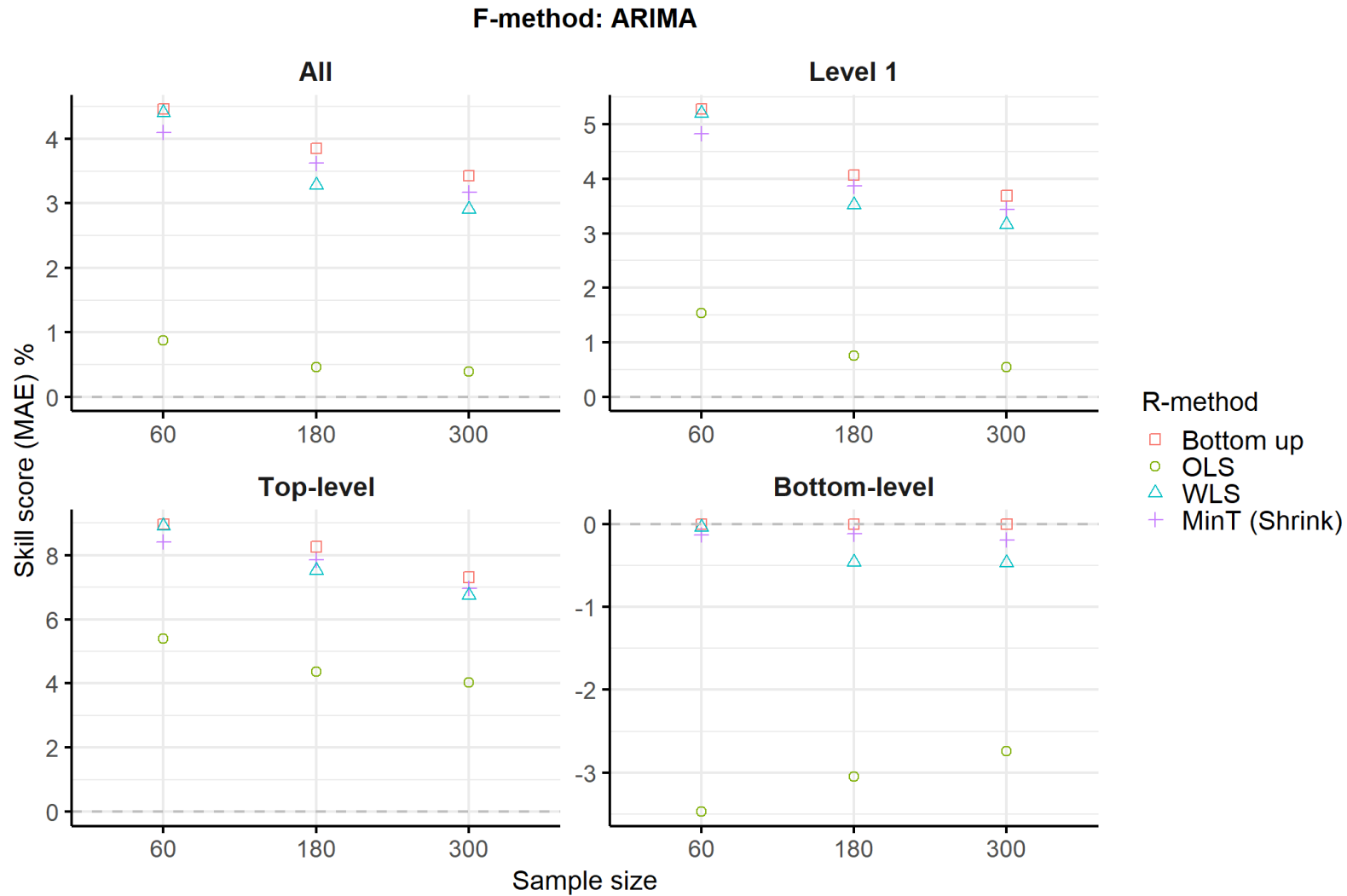
$$\textit{SkillScore} = 1 - \frac{\textit{score for the forecast}}{\textit{score for the base forecast}}$$

Un mayor skill score es mejor.

# Resultados

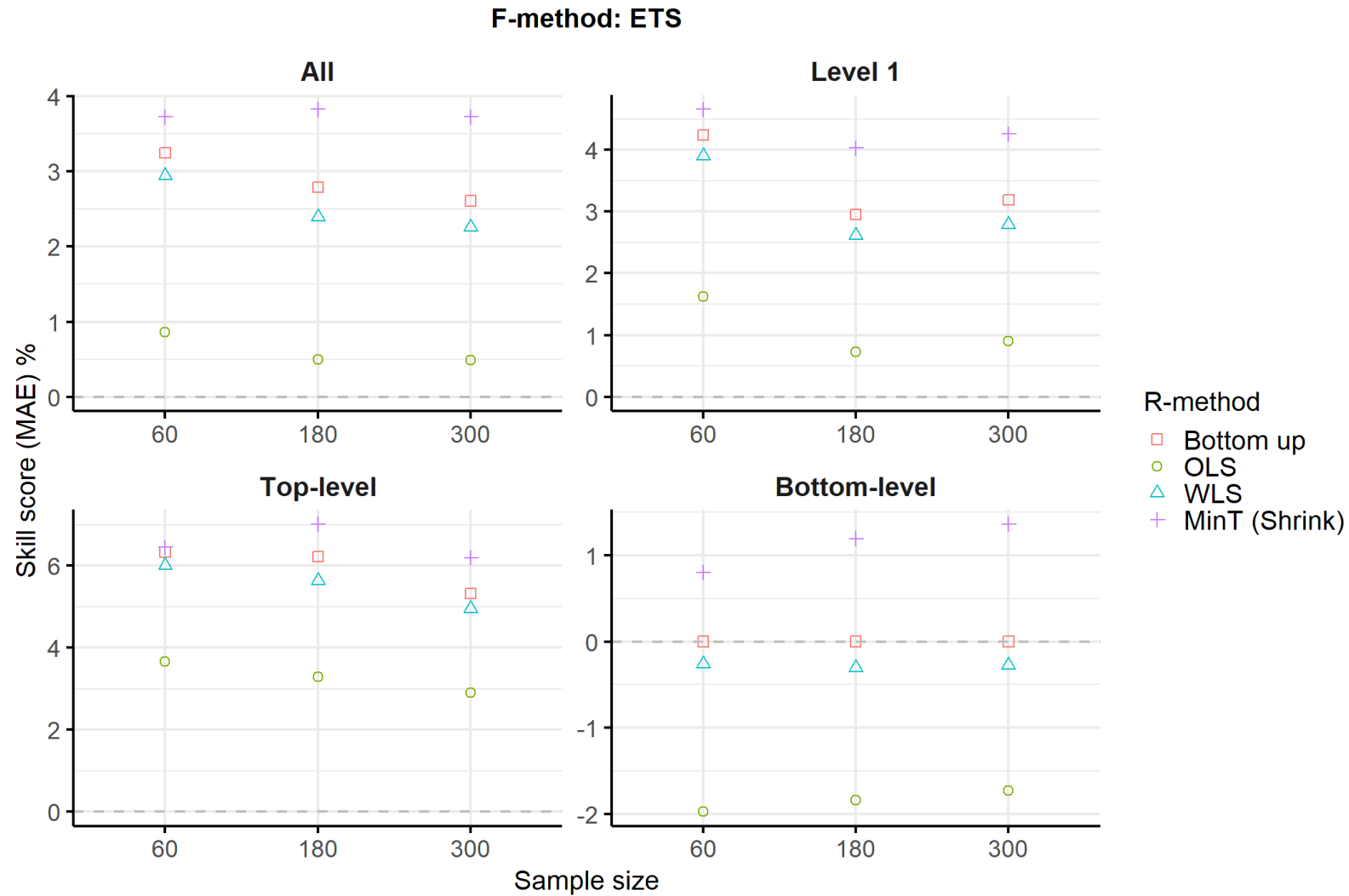
# Pronósticos puntuales

Figure 5.1. One-step-ahead point forecasting skill scores (MAE)



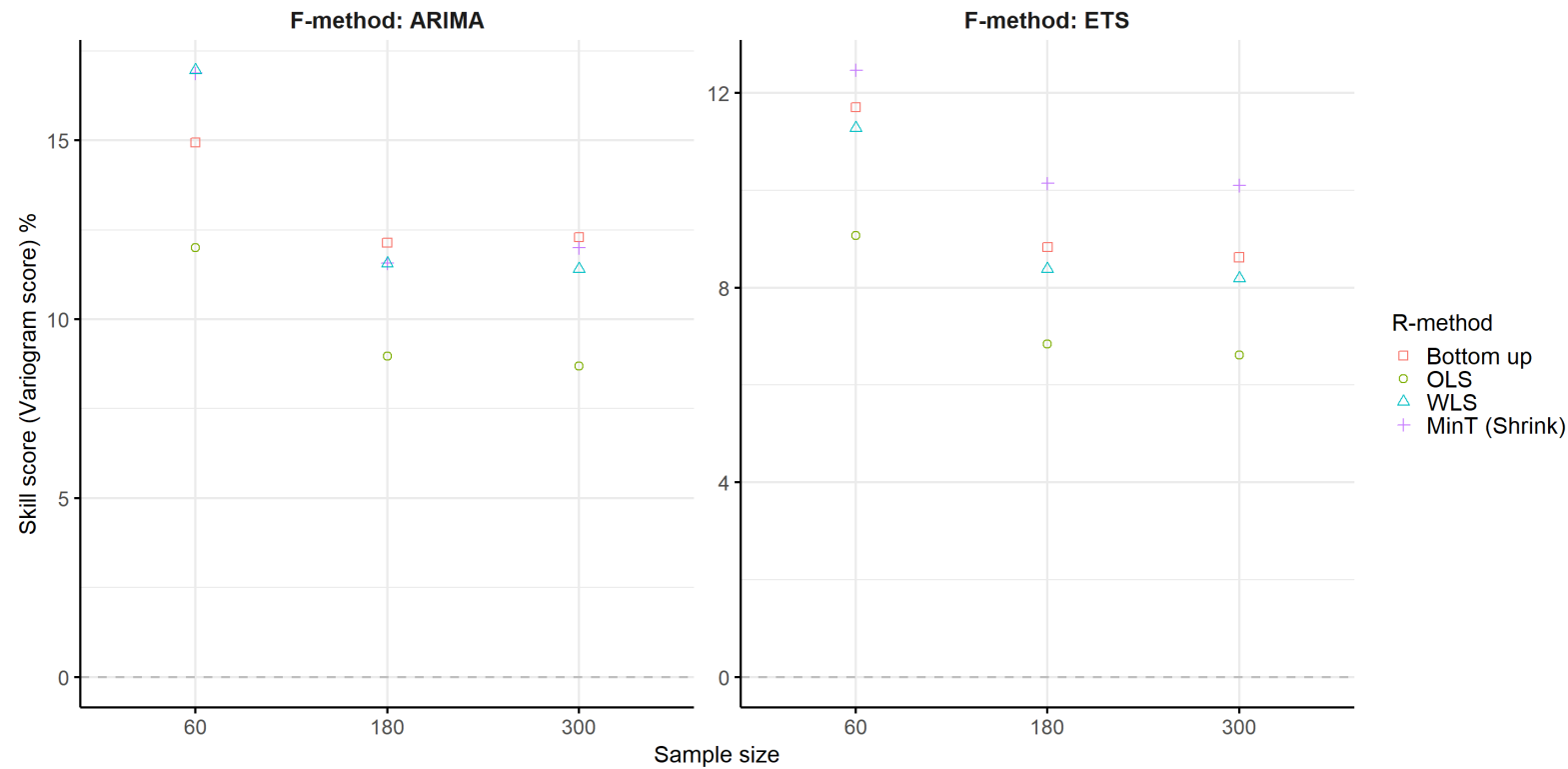
# Pronósticos puntuales

Figure 5.1. One-step-ahead point forecasting skill scores (MAE)



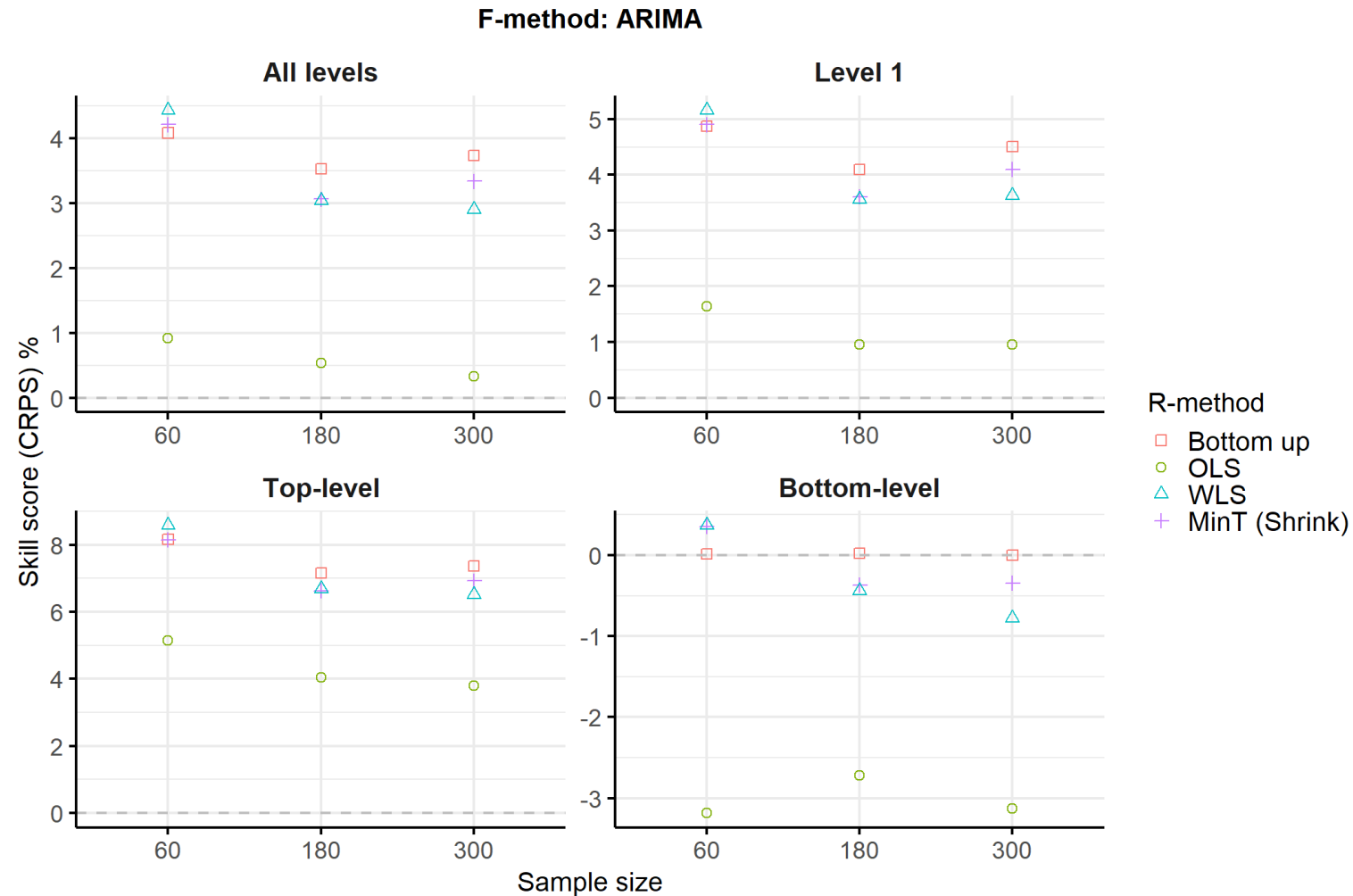
# Pronósticos probabilísticos gaussianos

Figure 5.2. One-step-ahead gaussian probabilistic forecasting skill scores (VS)



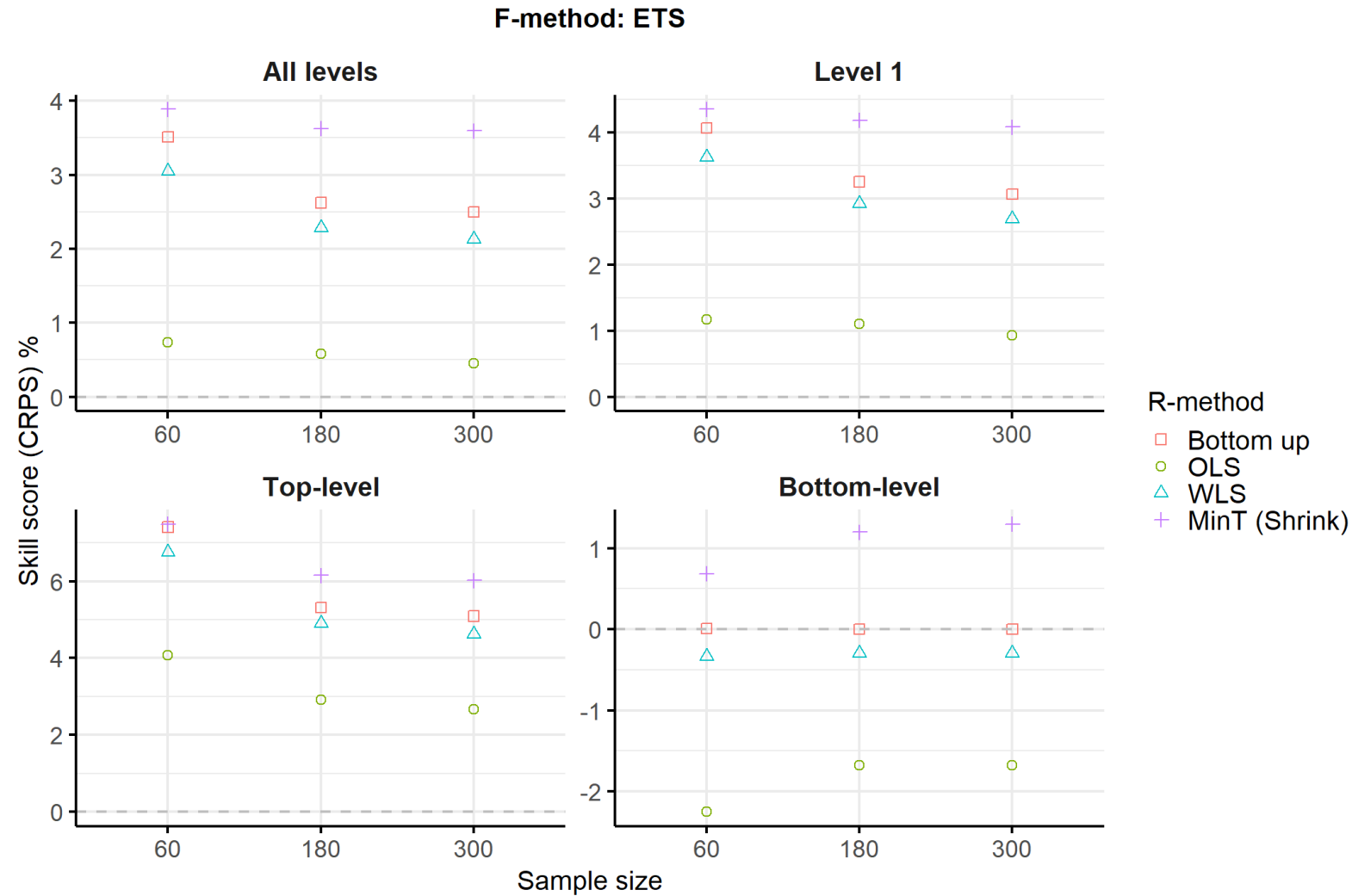
# Pronósticos probabilísticos gaussianos

Figure 5.4. One-step-ahead gaussian probabilistic forecasting skill scores (CRPS)



# Pronósticos probabilísticos gaussianos

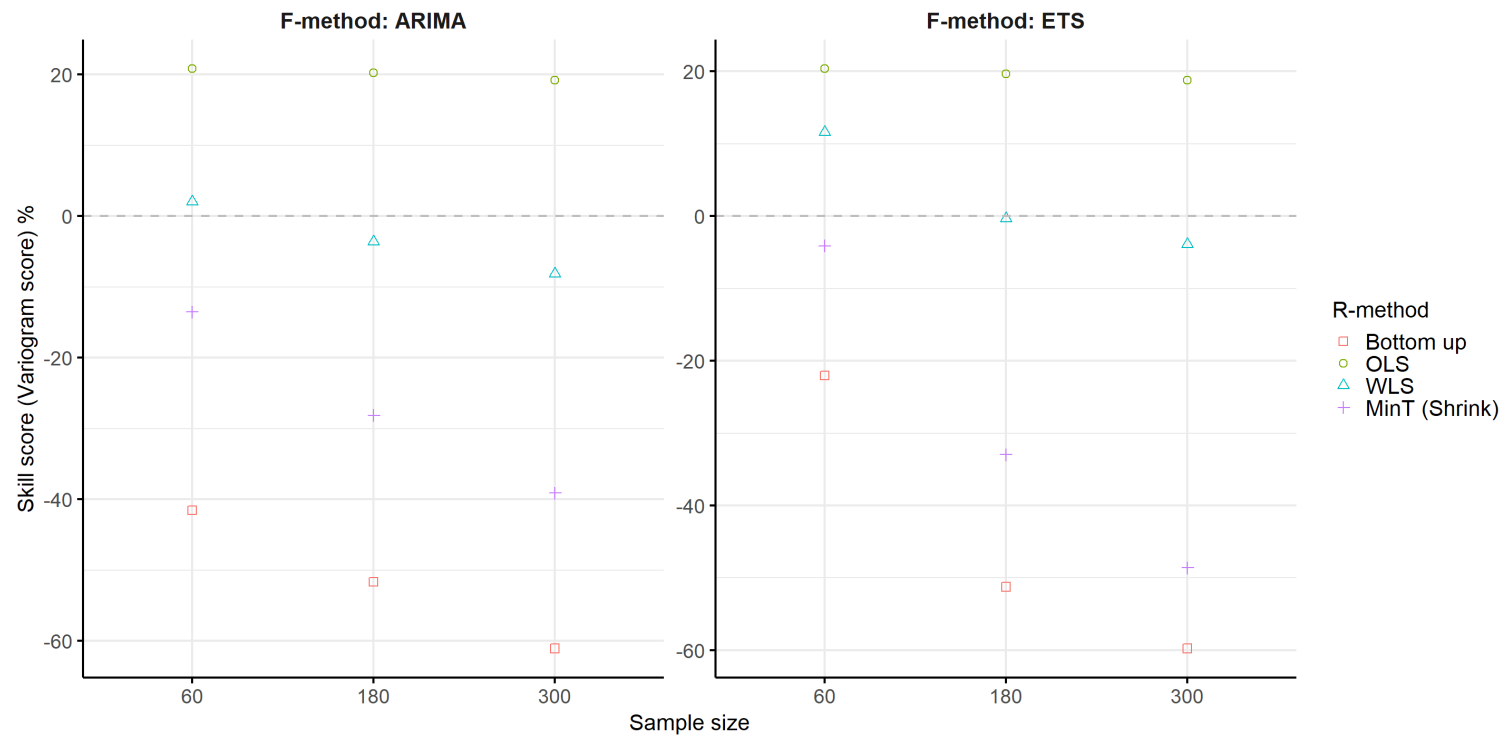
Figure 5.4. One-step-ahead gaussian probabilistic forecasting skill scores (CRPS)





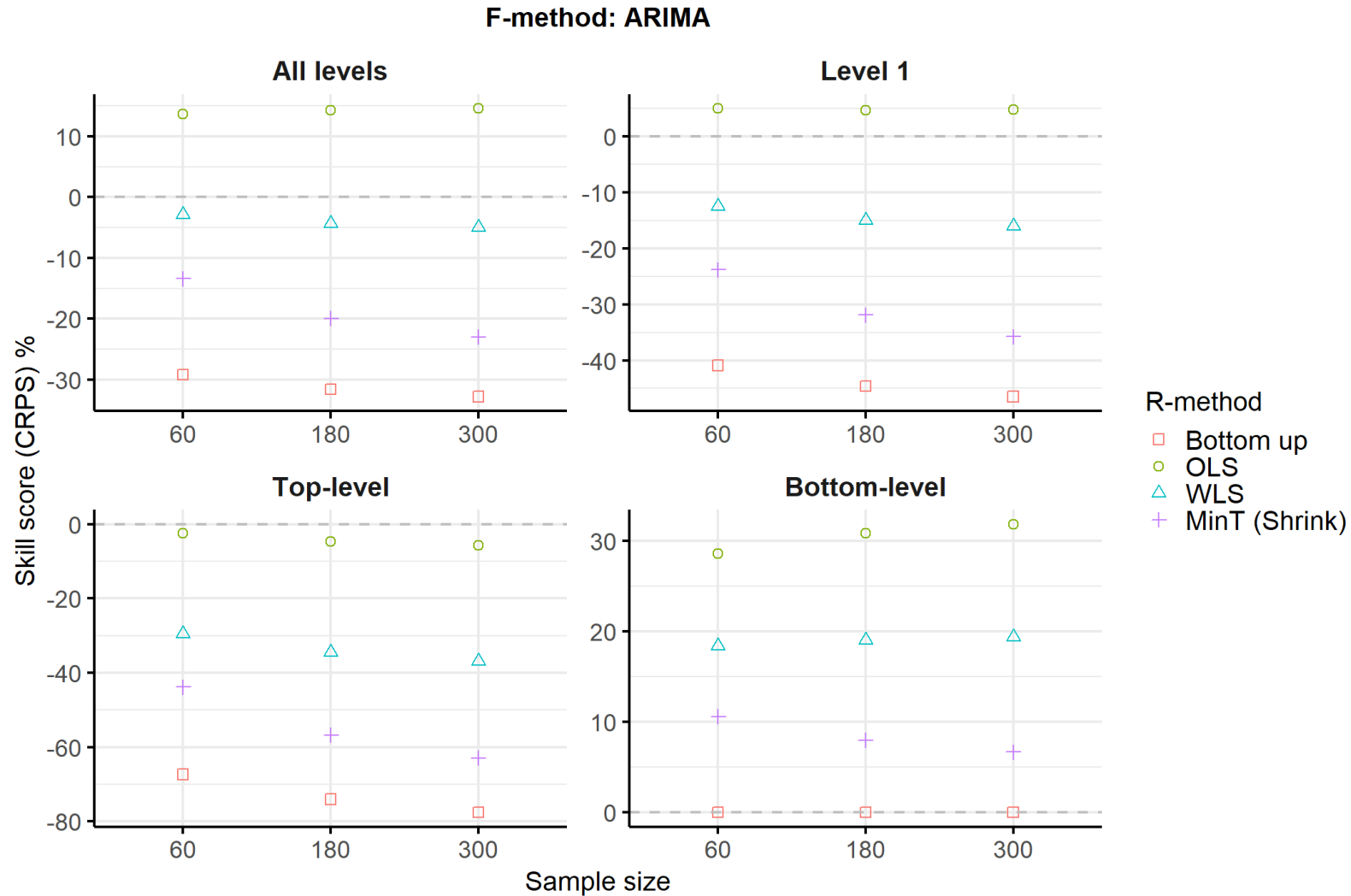
# Pronósticos probabilísticos no paramétricos

Figure 5.5. One-step-ahead non-parametric probabilistic forecasting skill scores (VS)



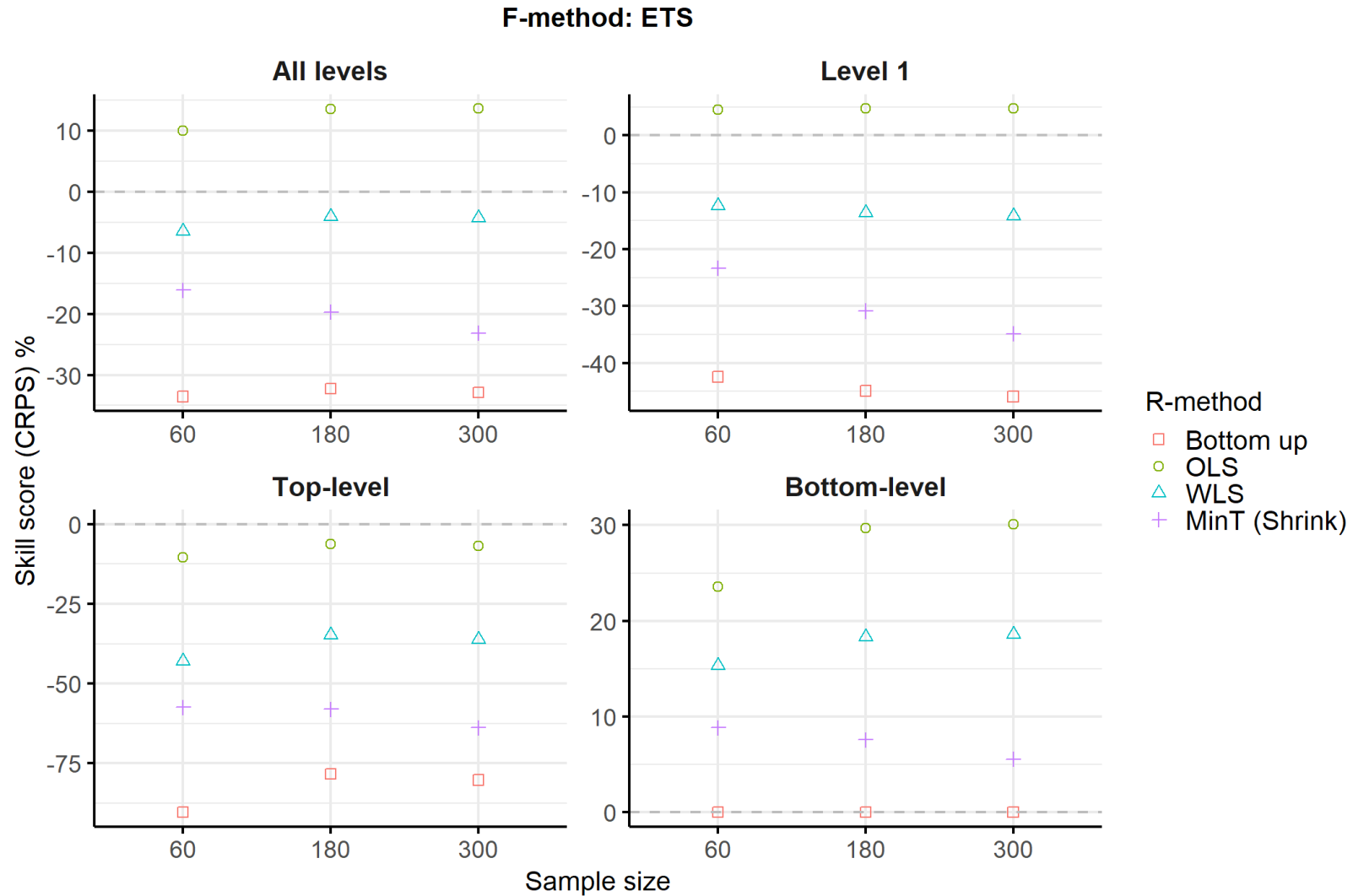
# Pronósticos probabilísticos no paramétricos

Figure 5.7. One-step-ahead non-parametric probabilistic forecasting skill scores (CRPS)



# Pronósticos probabilísticos no paramétricos

Figure 5.7. One-step-ahead non-parametric probabilistic forecasting skill scores (CRPS)



# Pronósticos probabilísticos

Table 5.2. Variogram score for hierarchical probabilistic forecasting approaches in different sample sizes

Panel A: Base forecast method ARIMA						
R-method	60		180		300	
	Gaussian	Bootstrap	Gaussian	Bootstrap	Gaussian	Bootstrap
Base	5.95	7.46	4.35	5.68	3.87	4.98
Bottom up	5.06	10.57	3.82	8.61	3.40	8.02
OLS	5.24	5.91	3.96	4.53	3.54	4.02
WLS	4.94	7.31	3.84	5.88	3.43	5.39
MinT (Shrink)	4.95	8.48	3.84	7.28	3.41	6.93

Panel B: Base forecast method ETS						
R-method	60		180		300	
	Gaussian	Bootstrap	Gaussian	Bootstrap	Gaussian	Bootstrap
Base	6.56	12.66	5.13	7.06	4.64	6.31
Bottom up	5.79	15.45	4.68	10.68	4.24	10.08
OLS	5.96	10.08	4.78	5.67	4.33	5.13
WLS	5.82	11.19	4.70	7.08	4.26	6.55
MinT (Shrink)	5.74	13.18	4.61	9.39	4.17	9.38

# Comentarios finales

- Hay espacio a la mejora de los pronósticos usando algoritmos de reconciliación para HTS en el marco probabilístico. En el mejor de los casos, la reconciliación mejora un 16.26% los pronósticos base.
- Con un proceso generador de datos ARIMA, encontramos que el pronóstico probabilístico gaussiano presenta mejores resultados que una aproximación no paramétrica.
- En general, MinT (Shrink) es el mejor método de reconciliación, tanto para pronósticos puntuales como probabilísticos.

# Recomendación para el forecaster

- Usar los métodos que se han mostrado, los investigadores/forecasters pueden mejorar los pronósticos, a través de tomar ventaja de la estructura jerárquica o agrupada de los datos.
- Los algoritmos de reconciliación probabilísticos permiten generar intervalos de confianza, importantes para la toma de decisiones, que son coherentes.

# Contacto

Cristian Urbano

[ccurbano@icesi.edu.co](mailto:ccurbano@icesi.edu.co)

Centro de Investigación en Economía y Finanzas – CIENFI

Universidad Icesi



# Bibliografía

- Almeida, V., Ribeiro, R., & Gama, J. (2016). Hierarchical time series forecast in electrical grids. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 376, 995–1005. [https://doi.org/10.1007/978-981-10-0557-2\\_95](https://doi.org/10.1007/978-981-10-0557-2_95)
- Athanasopoulos, G., Ahmed, R. A., & Hyndman, R. J. (2009). Hierarchical forecasts for Australian domestic tourism. *International Journal of Forecasting*, 25(1), 146–166. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2008.07.004>
- Athanasopoulos, G., Gamakumara, P., Panagiotelis, A., Hyndman, R. J., & Affan, M. (2019). *Hierarchical Forecasting*. Retrieved from <http://business.monash.edu/econometrics-and-business-statistics/research/publications>
- Athanasopoulos, G., Hyndman, R. J., Kourentzes, N., & Petropoulos, F. (2017). Forecasting with temporal hierarchies. *European Journal of Operational Research*, 262(1), 60–74. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.02.046>
- Billio, M., Jannin, G., Maillet, B., & Pelizzon, L. (2013). Portfolio Performance Measure and A New Generalized Utility-based N-moment Measure. *University Ca' Foscari of Venice, Dept. of Economics Research Paper Series No. 22*. Retrieved from <http://ssrn.com/abstract=2352928>
- Carriero, A., Clark, T. E., & Marcellino, M. (2015). Realtime nowcasting with a Bayesian mixed frequency model with stochastic volatility. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A: Statistics in Society*, 178(4). <https://doi.org/10.1111/rssa.12092>
- Clark, T. E., & Ravazzolo, F. (2015). Macroeconomic Forecasting Performance under Alternative Specifications of Time-Varying Volatility. *Journal of Applied Econometrics*, 30(4). <https://doi.org/10.1002/jae.2379>
- Collins, M. A. T. (2007). Ensembles and probabilities: A new era in the prediction of climate change. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 365, pp. 1957–1970. <https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2068>
- Fabio, A., Narzo, D., Aznarte, J. L., & Stigler, M. (2016). *Package "tsDyn": Nonlinear Time Series Models with Regime Switching*. Retrieved from <http://github.com/MatthieuStigler/tsDyn/wiki>
- Gamakumara, P., Panagiotelis, A., Athanasopoulos, G., & Hyndman, R. J. (2018). *Probabilistic Forecasts in Hierarchical Time Series*. Retrieved from <http://business.monash.edu/econometrics-and-business-statistics/research/publications>
- Geweke, J., & Amisano, G. (2011). Optimal prediction pools. *Journal of Econometrics*, 164(1). <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2011.02.017>
- Gneiting, T., & Katzfuss, M. (2014). Probabilistic Forecasting. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 1(1), 125–151. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-062713-085831>
- Gneiting, T., & Raftery, A. E. (2005). Weather forecasting with ensemble methods. *Science*, Vol. 310, pp. 248–249. <https://doi.org/10.1126/science.1115255>
- Gneiting, T., & Raftery, A. E. (2007). Strictly proper scoring rules, prediction, and estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 102(477). <https://doi.org/10.1198/016214506000001437>
- Haldane, A., Haskel, J., Saunders, M., Teneyro, S., & Vlieghe, G. (2019). *Monetary Policy Committee Inflation Report Inflation Report*. Retrieved from [www.bankofengland.co.uk/inflation-report/2019/august-2019](http://www.bankofengland.co.uk/inflation-report/2019/august-2019)
- Hamner, B., Frasco, M., & Ledell, E. (2018). *Package "Metrics": Evaluation Metrics for Machine Learning*.
- Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G., & Shang, H. L. (2014). hts: An R Package for Forecasting Hierarchical or Grouped Time Series. *Statistical Software*.
- Hyndman, R. J., Ahmed, R. A., Athanasopoulos, G., & Shang, H. L. (2011). Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(9), 2579–2589. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2011.03.006>



# Bibliografía

- Hyndman, Rob J., & Khandakar, Y. (2016). forecast: Forecasting functions for time series and linear models. *Journal of Statistical Software*, 26(3). <https://doi.org/10.18637/jss.v090.i12>
- Jordan, A., Krüger, F., & Lerch, S. (2019). Evaluating probabilistic forecasts with scoringRules. *Journal of Statistical Software*, 90. <https://doi.org/10.18637/jss.v090.i12>
- Kassambara, A. (2020). 'ggpubr': "ggplot2" Based Publication Ready Plots. *R Package Version 0.2.5*.
- OECD iLibrary | Designing fan charts for GDP growth forecasts to better reflect downturn risks. (n.d.). Retrieved October 20, 2020, from [https://www.oecd-ilibrary.org/economics/designing-fan-charts-for-gdp-growth-forecasts-to-better-reflect-downturn-risks\\_e86f1bfc-en](https://www.oecd-ilibrary.org/economics/designing-fan-charts-for-gdp-growth-forecasts-to-better-reflect-downturn-risks_e86f1bfc-en)
- Palmer, T. N. (2012). Towards the probabilistic Earth-system simulator: A vision for the future of climate and weather prediction. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 138(665), 841–861. <https://doi.org/10.1002/qj.1923>
- R Core Team. (2019). R: A language and environment for statistical computing. *R Found. Stat. Comput. Vienna, Austria*. URL <http://www.R-project.org/>, Page R Foundation for Statistical Computing.
- Scheuerer, M., & Hamill, T. M. (2015). Variogram-based proper scoring rules for probabilistic forecasts of multivariate quantities. *Monthly Weather Review*, 143(4). <https://doi.org/10.1175/MWR-D-14-00269.1>
- Shang, H. L., & Hyndman, R. J. (2017). Grouped Functional Time Series Forecasting: An Application to Age-Specific Mortality Rates. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 26(2), 330–343. <https://doi.org/10.1080/10618600.2016.1237877>
- Smith, M. S., & Vahey, S. P. (2016). Asymmetric Forecast Densities for U.S. Macroeconomic Variables from a Gaussian Copula Model of Cross-Sectional and Serial Dependence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 34(3), 416–434. <https://doi.org/10.1080/07350015.2015.1044533>
- Taieb, S. Ben, Taylor, J. W., & Hyndman, R. J. (2020). Hierarchical Probabilistic Forecasting of Electricity Demand With Smart Meter Data. *Journal of the American Statistical Association*. <https://doi.org/10.1080/01621459.2020.1736081>
- van Erven, T., & Cugliari, J. (2015). Game-Theoretically Optimal reconciliation of contemporaneous hierarchical time series forecasts. *Lecture Notes in Statistics*, 217, 297–317. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-18732-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-18732-7_15)
- Villegas, M. A., & Pedregal, D. J. (2018). Supply chain decision support systems based on a novel hierarchical forecasting approach. *Decision Support Systems*, 114, 29–36. <https://doi.org/10.1016/j.dss.2018.08.003>
- Wickham, H. (2012). reshape2: Flexibly reshape data: a reboot of the reshape package. *R Package Version*.
- Wickham, Hadley. (2011). ggplot2. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 3(2). <https://doi.org/10.1002/wics.147>
- Wickham, Hadley, Averick, M., Bryan, J., Chang, W., McGowan, L., François, R., ... Yutani, H. (2019). Welcome to the Tidyverse. *Journal of Open Source Software*, 4(43). <https://doi.org/10.21105/joss.01686>
- Wickramasuriya, S. L., Athanasopoulos, G., & Hyndman, R. J. (2019). Optimal Forecast Reconciliation for Hierarchical and Grouped Time Series Through Trace Minimization. *Journal of the American Statistical Association*, 114(526), 804–819. <https://doi.org/10.1080/01621459.2018.1448825>
- Yang, D., Quan, H., Disfani, V. R., & Rodríguez-Gallegos, C. D. (2017). Reconciling solar forecasts: Temporal hierarchy. *Solar Energy*, 158, 332–346. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2017.09.055>