

Modelo Macro-SIR para Colombia

Álvaro J. Riascos Villegas¹

11 de julio de 2020

¹Universidad de Los Andes y Quantil | Matemáticas Aplicadas. Con la colaboración de Juan D. Martín, Investigador Asociado Quantil.

Objetivos

- Calibrar un modelo macroeconómico y epidemiológico Macro-SIRD² para Colombia.
- Verificar la robustez de la calibración a diferentes metodologías.
- Realizar análisis de sensibilidad de los resultados frente a cambios en ciertos parámetros.
- Introducir un componente de inflación en el modelo y analizar su relevancia en los resultados.

²Siglas en inglés que denotan susceptibles, infectados, recuperados y muertes, respectivamente.

Modelo macroeconómico en presencia de epidemia

Se sigue el modelo propuesto por Eichenbaum, Rebelo, y Trabandt (2020):

- Extiende el modelo epidemiológico clásico SIR (Kermack y McKendrick, 1927):
 - 1 La tasa de contagio y la evolución de la epidemia dependen de la actividad económica.
 - 2 Existen externalidades de las decisiones de los agentes en el contagio y mortalidad.
 - 3 Los agentes anticipan las acciones de política de las autoridades.

Modelo macroeconómico en presencia de epidemia

- Existen 4 tipos de agentes: Susceptibles (S), Infectados (I), Recuperados (R) y Muertos (D).
- El evento de contagio depende de actividades de consumo y trabajo, y una parte independiente de la actividad económica.
- Los agentes maximizan utilidad que depende del consumo y el ocio.
- Las medidas restrictivas se modelan como impuestos al consumo.

Flujo de infectados

Flujo de nuevos infectados:

$$T_t = \pi_1(S_t C_t^S)(I_t C_t^I) + \pi_2(S_t N_t^S)(I_t N_t^I) + \pi_3(S_t I_t), \quad (1)$$

donde:

- S_t y I_t denotan el stock de susceptibles e infectados, respectivamente, al momento t .
- C_t^k y N_t^k son el consumo y horas trabajadas por persona en edad de trabajar en estado $k = \{S, I\}$.

Flujo de infectados

- El stock de infectados evoluciona como sigue:

$$I_{t+1} = I_t + T_t - (\pi_{dt} + \pi_r)I_t \quad (2)$$

- Se asume que la tasa de mortalidad, π_{dt} , depende de las restricciones en la capacidad hospitalaria:

$$\pi_{dt} = \pi_d + 1_{\{I_t > \lambda\}} \kappa I_t^2, \quad (3)$$

donde λ representa la capacidad de UCIs disponibles para casos de alto riesgo.³

³Según REPS, este número es aproximadamente 1.7 camas por cada 10 mil habitantes.

Otros estados

- Los stocks de muertes, D_t , recuperados, R_t , y susceptibles, S_t evolucionan como sigue

$$D_{t+1} = D_t + \pi_{dt} I_t, \quad (4)$$

$$R_{t+1} = R_t + \pi_r I_t, \quad (5)$$

$$S_{t+1} = S_t - T_t, \quad (6)$$

donde $I_0 = \epsilon$ y $S_0 = Pop_0 - \epsilon$.

Trabajo y consumo

- Se asume que cada agente maximiza la suma a perpetuidad de su utilidad condicional en su estado actual j y la probabilidad de pasar a otro estado en el futuro:

$$U_t^j = u(c_t^j, n_t^j) + \beta E[U_{t+1} | j] \quad (7)$$

donde

$$u(c_t, n_t) = \ln c_t - \frac{\theta}{2} n_t^2. \quad (8)$$

Con restricción presupuestal:

$$(1 + \mu_t)c_t^j = \phi^j w_t n_t^j + \Gamma_t \quad (9)$$

- La probabilidad de un susceptible de ser infectado es:

$$\tau_t = \pi_1(c_t^S)(I_t C_t^I) + \pi_2(n_t^S)(I_t N_t^I) + \pi_3(I_t) \quad (10)$$

Equilibrio sin inflación

- En equilibrio el consumo agregado es igual a la producción total:

$$\begin{aligned} C_t &= AN_t \\ S_t C_t^S + I_t C_t^I + R_t C_t^R &= A(S_t N_t^S + I_t N_t^I + R_t N_t^R) \end{aligned} \quad (11)$$

Rigideces nominales e inflación

Se asume un mercado de bienes intermedios no competitivo, en el cual los precios presentan rigideces nominales que afectan a los salarios.

- El bien final de la economía se produce a partir de una masa continua de estos bienes intermedios:

$$Y_t = \left[\int Y_t(i)^q di \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (12)$$

donde $Y_t(i)$ es la cantidad de bien intermedio producido por la firma i .

- Las firmas productoras del bien final maximizan sus beneficios

$$\Pi_t = P_t Y_t - \int P_t(i) Y_t(i) di, \quad (13)$$

en un mercado competitivo.

Firmas intermedias

- Las firmas intermedias se asumen idénticas y cuya función de producción para el bien i es:

$$Y_t(i) = AN_t(i) \quad (14)$$

- Cada firma i maximiza beneficios

$$\Pi_t(i) = P_t(i)Y_t(i) - w_tN_t(i) \quad (15)$$

en un contexto de competencia monopolística, cuya demanda está dada por

$$Y_t^d(i) = \left[\frac{P_t}{P_t(i)} \right]^{\frac{1}{1-q}} Y_t \quad (16)$$

Firmas intermedias

- Asumiendo un equilibrio simétrico, la condición de primer orden para el precio óptimo de la firma i es

$$P_t^*(i) = P_t^* = \frac{1}{q} \left(\frac{w_t}{A} \right) \quad (17)$$

- Lo cual implica que, en equilibrio

$$Y_t = AN_t \quad (18)$$

Rigidez en precios

Se sigue el modelo de Calvo donde la firma puede fijar precios de forma óptima cada periodo con probabilidad $1 - \omega$

- Así el precio agregado en el periodo t está dado por

$$P_t = (1 - \omega)x_t + \omega P_{t-1} \quad (19)$$

donde x_t el precio que escogen las firmas cuando pueden actualizar sus decisiones.

- Luego, si el precio objetivo P_t^* depende del precio agregado y del nivel de producto agregado, se puede la inflación η_t como:

$$\eta_t = \beta E_t[\eta_{t+1}] + \gamma \ln Y_t + \varepsilon_t \quad (20)$$

Política

- Así el precio agregado en t puede expresarse como

$$P_t = P_{t-1} \exp\{\eta_t\} \quad (21)$$

- Luego, con la identidad de Fisher, se definen las expectativas de inflación en términos del interés nominal y real

$$E_t \eta_{t+1} = i_t - r \quad (22)$$

- Finalmente se asume que la tasa de interés como instrumento de política está dada por la siguiente regla de Taylor

$$i_t = \eta_t + r + \delta_\eta(\eta_t - \eta_t^*) + \delta_y(Y_t - \tilde{Y}_t) + \nu_t \quad (23)$$

donde η_t^* es la inflación objetivo y \tilde{Y}_t el nivel de producción de equilibrio con precios flexibles.

Deuda pública

- Se plantea la siguiente ecuación de gasto público, G_t

$$G_t = \tau_t C_t + B_t - q_B B_{t+1} \quad (24)$$

donde τ_t y B_t denotan la tasa impositiva y el saldo de deuda al momento t

- El gasto público entra en la utilidad y restricción presupuestaria del agente representativo como:

$$u^j(c_t, G_t, n_t) = \ln c_t^j + \ln G_t - \frac{\theta}{2} (n_t^j)^2 \quad (25)$$

$$(1 + \tau + \mu_t) c_t^j = \phi^j w_t n_t^j + \Gamma_t + G_t \quad (26)$$

- Asimismo q_B denota el factor de descuento del nivel de deuda adquirido en el futuro.
- Asumiendo una probabilidad de *default* igual a cero y el Gobierno local como precio-aceptante $q_B = 1/(1 + r_B)$

Deuda pública

- El Gobierno elige τ , G , B que maximizan el bienestar futuro de los agentes:

$$V = \max_{\tau, G, B} \left\{ \sum_j u^j(c_t, G_t, n_t) + \beta E \left[\sum_j u^j(c_{t+1}, G_{t+1}, n_{t+1}) | j \right] \right\} \quad (27)$$

- Sujeto a (24) y a:

$$AN_t = (1 + \tau_t + \mu_t)C_t \quad (28)$$

$$\frac{AN_t}{1 + \tau_t + \mu_t} = \frac{u_n(c_t, n_t; G_t)}{u_c(c_t, n_t; G_t)} \quad (29)$$

Datos

Datos epidemiológicos

Corresponden al seguimiento individual de infectados registrados a nivel nacional entre marzo y mayo de 2020. Suministrados por el Instituto Nacional de Salud (INS). Incluyen:

- Estado: infectado (leve, moderado, grave, asintomático), recuperado, muerte,
- Tipo de atención: hospitalizado o en casa.
- Tipo de contagio: importado o relacionado al interior.
- Fecha: notificación del caso, inicio de síntomas (FIS), hospitalización, diagnóstico, recuperación, muerte.
- Región: ciudad y departamento de atención; país de procedencia del contagio.
- Demografía: sexo, edad.

Datos macroeconómicos

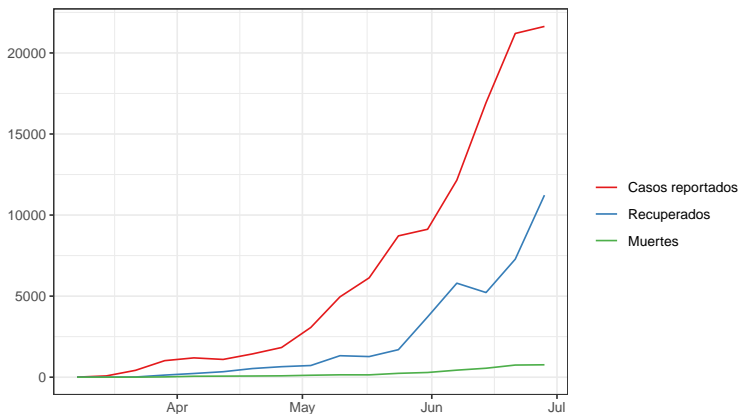
Suministrados por DANE y Min. Educación:

- Proyecciones de población nacional.
- Cuentas Nacionales.
- Matrículas educación básica, primaria, secundaria y superior.
- Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH).
- Encuesta Nacional de Presupuesto de los Hogares (ENPH).

Datos epidemiológicos:

Casos reportados, recuperados, muertes y tasa de mortalidad de los casos reportados.

Evolución semanal de la epidemia

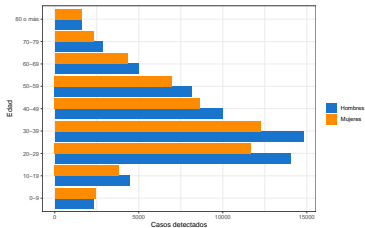


La tasa de mortalidad en los casos reportados es de 3.47%.

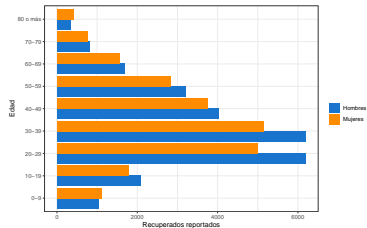
Fuente: Cálculos propios con base en información del INS.

Por sexo y edad

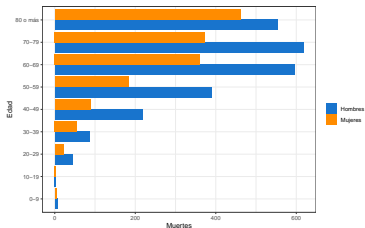
Casos reportados



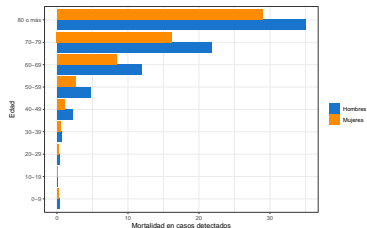
Recuperados



Muertes



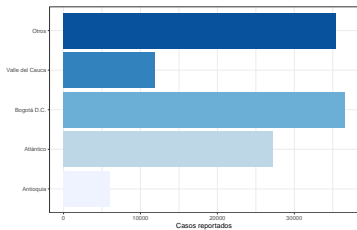
Tasa mortalidad de casos reportados



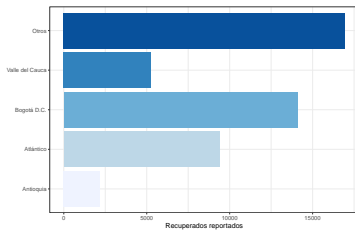
Fuente: Cálculos propios con base en información del INS

Por departamento

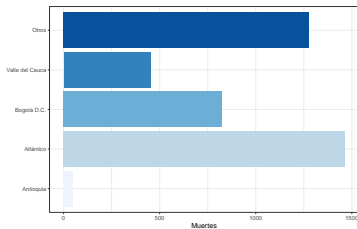
Casos reportados



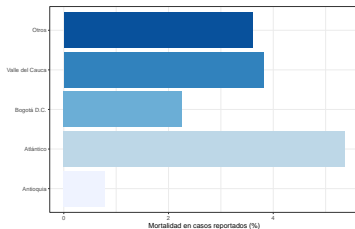
Recuperados



Muertes



Tasa mortalidad de casos reportados



Fuente: Cálculos propios con base en información del INS

Datos demográficos:

Educación, composición poblacional y hábitos de consumo

Matriculados - 2018

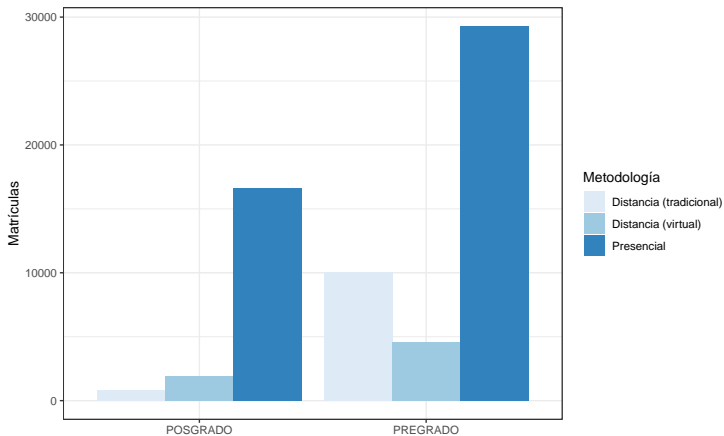
Educación básica primaria, secundaria y preparatoria.

Departamento	2017	2018	Variación (%)
Total nacional	10.020.294	9.916.546	-1,0
Bogotá, D.C	1.336.662	1.308.383	-2,1
Antioquia	1.255.404	1.242.423	-1,0
Valle del Cauca	823.751	811.489	-1,5
Cundinamarca	602.542	604.588	0,3
Atlántico	537.691	534.739	-0,5
Bolívar	501.502	496.947	-0,9
Santander	436.451	439.395	0,7
Córdoba	420.669	420.447	-0,1
Magdalena	355.596	360.898	1,5
Nariño	324.531	313.318	-3,5
Resto departamentos	3.425.495	3.383.919	-1,2

Fuente: DANE

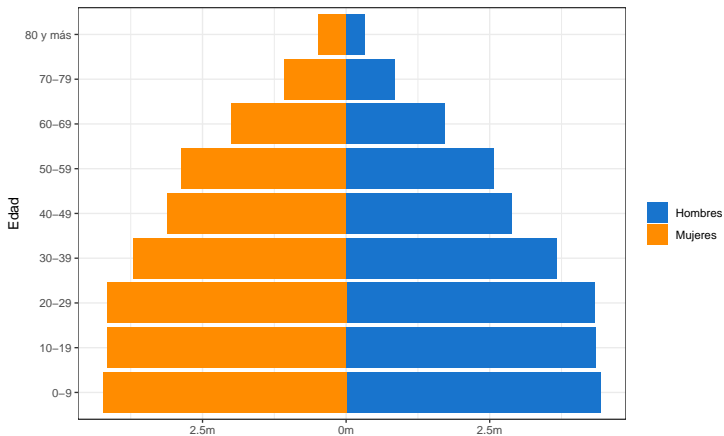
Matriculados - 2018

Educación superior



Fuente: Min. Educación

Proyección poblacional 2020



Fuente: DANE

Mercado laboral - 2019

Segmento	Porcentaje población total
Población en edad de trabajar (PET)	80.54 %
Población económicamente activa (PEA)	51.19 %
Ocupados	46.31 %
Desocupados	4.88 %

Fuente: DANE

Distribución del gasto mensual de los hogares - 2017

Segmento del gasto	Porcentaje del total mensual
01 Alimentos y bebidas no alcohólicas*	15.90 %
02 Bebidas alcohólicas y tabaco*	0.74 %
03 Prendas de vestir y calzado*	3.86 %
04 Alojamiento y servicios	28.72 %
05 Muebles y artículos para el hogar	3.49 %
06 Salud	1.71 %
07 Transporte*	9.46 %
08 Información y comunicación	3.34 %
09 Recreación y cultura*	3.08 %
10 Educación	2.95 %
11 Restaurantes y hoteles*	8.44 %
12 Bienes y servicios diversos	18.30 %

Fuente: DANE. Nota: Las categorías marcadas se consideran como las ramas de consumo que implican un nivel alto de interacción social.


Calibración

Benchmark, Estadístico básico y Estadístico con inflación.

Calibración

La calibración del modelo se realiza mediante dos métodos diferentes:

- 1 **Benchmark:** Siguiendo Eichenbaum y cols. (2020) empleando información correspondiente al caso colombiano.
- 2 **Estadístico:** Eligiendo los parámetros de las ecuaciones SIRD⁴ que permiten el mejor ajuste a la serie observada de muertes en un contexto con restricciones económicas activas.

⁴Fijando el resto de parámetros como en el punto 1. 

Calibración Benchmark

Para esta calibración se sigue la metodología empleada por Eichenbaum y cols. (2020) empleando datos de Colombia.

- β : al igual que en Eichenbaum y cols. (2020), se calcula a partir del equivalente semanal para una tasa de interés anual de $r = 4\%$, como $\beta = (1 + r)^{-1/52}$.
- π_d : se calcula a partir del promedio ponderado de las tasas de mortalidad por edad de Corea del Sur a mayo 5, usando como pesos las proyecciones de la población por edad para Colombia en 2020. Luego, asumiendo que en promedio un infectado toma 18 días en morir o recuperarse, se ajusta la tasa al periodo semanal $\pi_d = 1.13\% \times (7/18)$.
- π_r : es el complemento de la moratlidad media durante los 18 días de infección $\pi_r = 7/18 - \pi_d$.

Calibración Benchmark

- ϕ : se calcula a partir del porcentaje de infectados que son sintomáticos. Se sigue el mismo valor empleado por Eichenbaum y cols. (2020), $\phi = 0.8$ (productividad de los infectados).
- κ : se sigue del estudio de Lopez (2020) y se fija su valor de acuerdo al contexto de una economía emergente. $\kappa = 1.5$
- λ : Se toma el número de camas UCI disponible por habitante (1.7/10,000) y se divide por la probabilidad de casos de alto riesgo que se asume como 8%. Así $\lambda = 1.7/800$

Calibración Benchmark

- N : promedio de horas semanales trabajadas por persona de la población en edad de trabajar (PET) en Colombia⁵, de acuerdo la GEIH, $N = 26$.
- C : corresponde al ingreso semanal por persona de la PET. Este se calcula dividiendo PIB anual para 2019 sobre la PET y sobre 52 semanas. $C = 500,000$.

⁵Personas de 12 años de edad o más en las zonas urbanas, y de 10 años o más en las zonas rurales.

Calibración Benchmark

Consumo:

- 1 Se estima la proporción del consumo en actividades de alta interacción social con base en información de la ENPH sobre la proporción del gasto de los hogares en: alimentos, bebidas, prendas de vestir, calzado, transporte, restaurantes, turismo, servicios de recreación y culturales. Esto suma 41.5 %.
- 2 Luego esta fracción se multiplica por la proporción de infecciones que se atribuyen a actividades de consumo, igual a 33 % según Ferguson, Cummings, Fraser, y cols. (2006).
- 3 Así estimamos que la proporción de contagio por consumo para Colombia es de 13.7 %.

Calibración Benchmark

Trabajo:

- 1 Se calcula separando de la parte de trabajo y educación usando las ponderaciones de Lee y cols. (2010).
- 2 Tomando el número de ocupados como la PEA: 22.5 millones de personas.
- 3 Los estudiantes desde primaria hasta pre-grado como la población estudiantil: 13.4 millones
- 4 Ponderamos la frecuencia de contacto en actividades de estudio y trabajo iguales a 10 y 4, respectivamente (Lee y cols., 2010). Esto nos da una fracción de contagios en el sitio de trabajo de $22.5 \times 4 / (22.5 \times 4 + 13.4 \times 10) \approx 15\%$.
- 5 Así, tomando de Ferguson y cols. (2006) que el 37% de contagios vienen del sitio de trabajo, estimamos una proporción de contagio por actividades laborales de aproximadamente 15%.

Calibración Benchmark

- Limite de la población infectada se fija en 60 %, tomado directamente del estudio de Eichenbaum y cols. (2020).
- ϵ : se calcula a partir el número de casos importados disponible en los datos del INS y proyecciones poblacionales para Colombia. $\epsilon = 0.0016 \%$.
- El resto de parámetros se deducen a partir de las condiciones de estado estacionario del modelo.

Calibración parámetros del modelo monetario

- q : se aproxima como la fracción de PIB que corresponde a al consumo de los hogares y a importaciones. Esto es $q = (\text{Consumo} + \text{Importaciones})/\text{PIB} = 0.92$.
- η^* : se construye el equivalente semanal a partir de la inflación objetivo del Banco de La República, 3% anual.
 $\eta^* = (1.03)^{1/52} - 1$.
- δ_η y δ_y : se toman siguiendo la recomendación de expertos para el caso colombiano, y aproximándolas a escala semanal.
 $\delta_\eta = 2.5/52$ y $\delta_y = 0.75/52000$.
- γ : se infiere de las ecuaciones (20) y (23) en estado estacionario, cuando $\eta_t = \eta^*$ y $Y_t = Y^*$, asumiendo que $\varepsilon = 0$. Entonces, $\gamma = \eta^*(1 - \beta)/\ln C = 0.000108$.

Calibración parámetros del modelo de deuda

- qB : se aproxima tomando una tasa cupón anual de 7.25 %, tal que $qB = 1/(1.0725)$.
- B_0 : Siguiendo el último reporte sobre deuda publica se fija el nivel de deuda inicial como 60 % del PIB. En este caso, $B_0 = 500 \times 0.6$.

Calibración Estadística

Una alternativa que se emplea es emplear las series de muertes reportadas por el INS para calibrar los parámetros de la parte SIRD del modelo, tomando el valor de la calibración Benchmark para el resto de parámetros.

- La búsqueda de parámetros se realiza en un contexto con restricciones (cuarentena), es decir $\mu_t > 0$.
- Se plantea una cuarentena constante para los primeros 32 semanas (8 meses), con reducción gradual para las semanas restantes. Es decir, $\mu_t = \hat{\mu} > 0$ para todo $t \leq 32$ y $\mu_t = \prod_{l=32}^{t-1} \mu_l$ para $t > 32$.
- Se buscan los parámetros π_d , π_r y μ , así como el porcentaje límite de infectados, que denotamos ψ .

Calibración Estadística

- Se minimiza (eligiendo $\hat{\mu}, \hat{\pi}_d, \hat{\pi}_r, \hat{\psi}$ - el porcentaje de infectados hasta alcanzar inmunidad de rebaño):

$$\sum_{t=t_a}^{t_b} (D_t - \hat{D}_t)^2, \quad (30)$$

donde \hat{D}_t son las muertes que predice el modelo, t_a y t_b denotan las semanas inicial y final, respectivamente.

Calibración Estadística

- Con base en el reciente informe de datos vitales para el primer trimestre del 2020 del DANE, se asume que la epidemia en Colombia comienza 4 semanas antes del primer caso reportado.
- Adicionalmente, no se toman en cuenta las 8 primeras semanas observadas para la estimación: $t_a = 13$.
- Finalmente, se descarta la última semana observada previendo posibles errores de medición: $t_b = 23$ observada.

Resultados

Calibración, bondad de ajuste, análisis con y sin cuarentena.

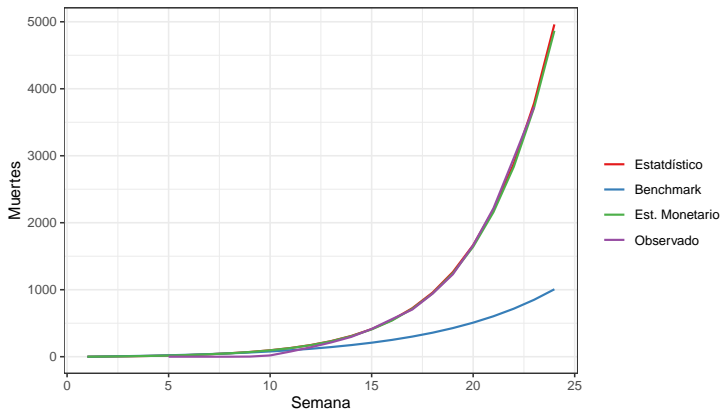
Resultados - Calibración

Variable	Benchmark	Estadístico	Monetario	Deuda
R_0	1.46	1.36	1.36	1.37
Pico de infectados (miles)	1,794.59	1,441.63	1,436.76	1,250.60
Total muertes (miles)	311.53	84.42	90.85	80.76
Total recuperados (miles)	19,843.93	19,048.38	18,715.50	17,585.00
TM promedio (%)	1.55	0.44	0.48	0.46
TM máxima (%)	1.92	0.54	0.58	0.53
Caída en consumo mínima (%)	-0.01	-0.21	-0.62	-0.41
Caída en consumo máxima (%)	-23.67	-20.89	-18.30	-34.74
Desempleo mínimo (%)	9.50	9.69	9.71	-8.44
Desempleo máximo (%)	30.93	28.41	25.18	18.57
π_d	0.0044	0.0029	0.0033	0.0033
π_r	0.3845	0.8902	0.9001	0.9001
ψ	0.60	0.59	0.56	0.56
μ	0.00	0.20	0.11	0.11
Mes pico de infectados	17	8	8	8
RMSE - Muertes	1,299.48	34.15	33.94	60.17

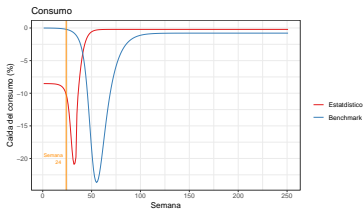
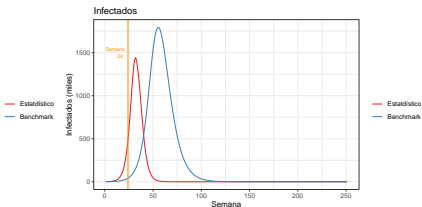
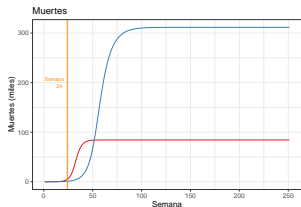
Resultados

- Benchmark vs Estadístico (monetario y deuda):
 - ① Ajuste muertes.
 - ② Muertes, Infectados, Recesión.
- Estadístico: sin vs. con inflación y deuda:
 - ① Muertes, Infectados, Recesión.
- Evolución sendas de inflación e interés nominal.
- Evolución gasto público e impuestos.
- Análisis de efectos de cuarentena
 - ① Estadístico básico
 - ② Estadístico con inflación

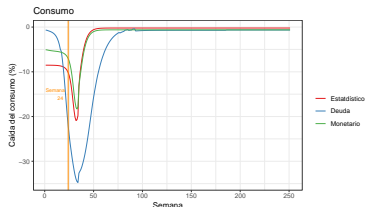
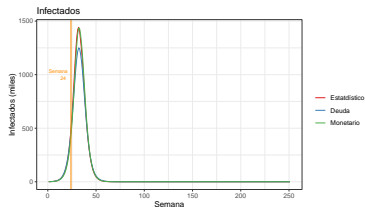
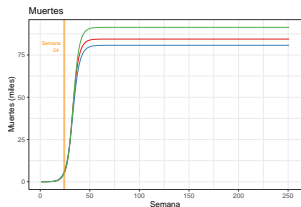
Resultados - Ajuste muertes



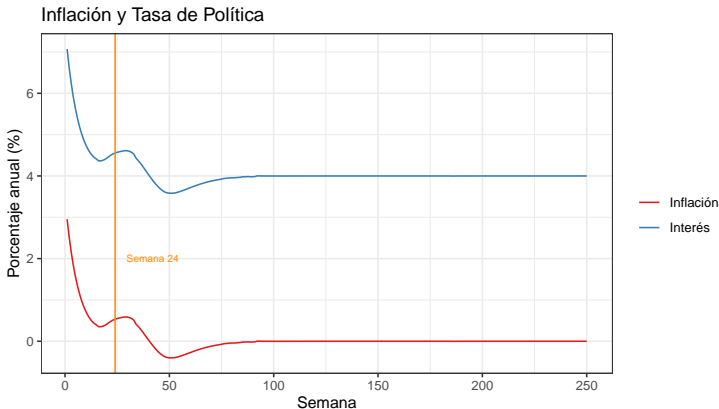
Resultados - Benchmark vs. Estadístico



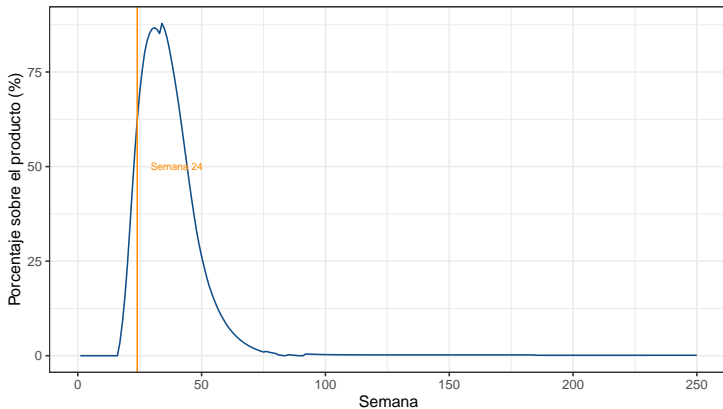
Resultados - Estadístico, con inflación y deuda



Resultados - Sendas de inflación e interés nominal



Resultados - Gasto público

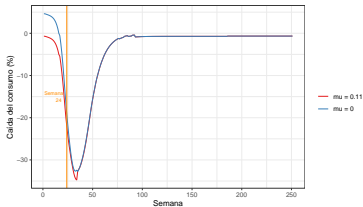
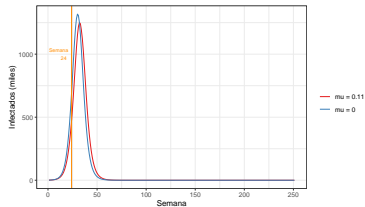
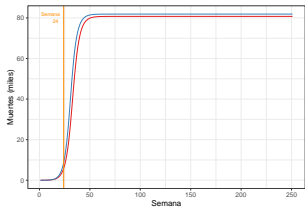


Efectos de cuarentena

Estadístico básico y Estadístico con inflación.

Efectos de cuarentena

Estadístico con inflación y deuda



Referencias

- Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., y Trabandt, M. (2020). *The macroeconomics of epidemics*. (NBER Working paper)
- Ferguson, N., Cummings, D., Fraser, C., y cols. (2006). Strategies for mitigating an influenza pandemic. *Nature*, 442(1), 448-452.
- Lee, B. Y., Brown, S. T., Cooley, P. C., Zimmerman, R. K., Wheaton, W. D., Zimmer, S. M., y cols. (2010). A computer simulation of employee vaccination to mitigate an influenza epidemic. *American Journal of Preventive Medicine*, 38(3), 247-257.
- Lopez, J. I. (2020). *Políticas de cuarenta para enfrentar el covid-19 en países en desarrollo*. (NBER Working paper)