

cobertura global y de orden superior

ricardo pachón cortés
credit suisse

en esta charla

(1) cobertura dinámica

(2) cobertura global y de orden superior: ¿qué es?

(3) cobertura global y de orden superior: ¿cómo se construye?

cobertura dinámica

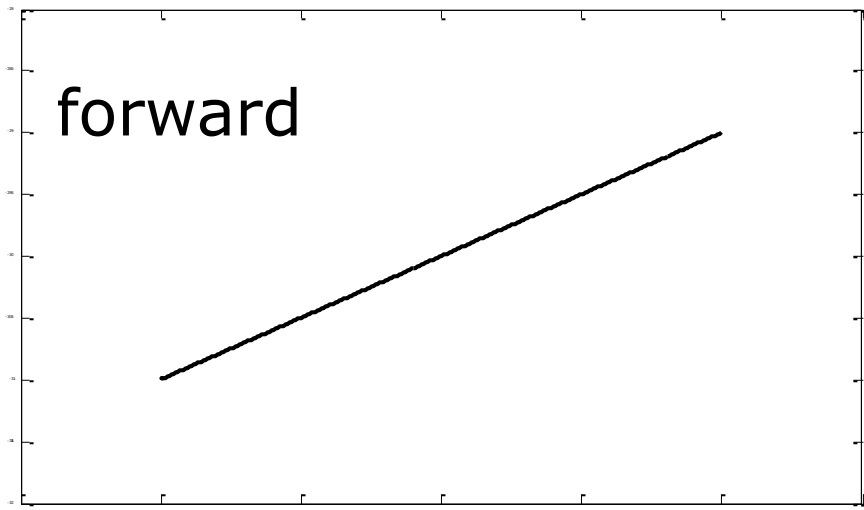


activos subyacentes

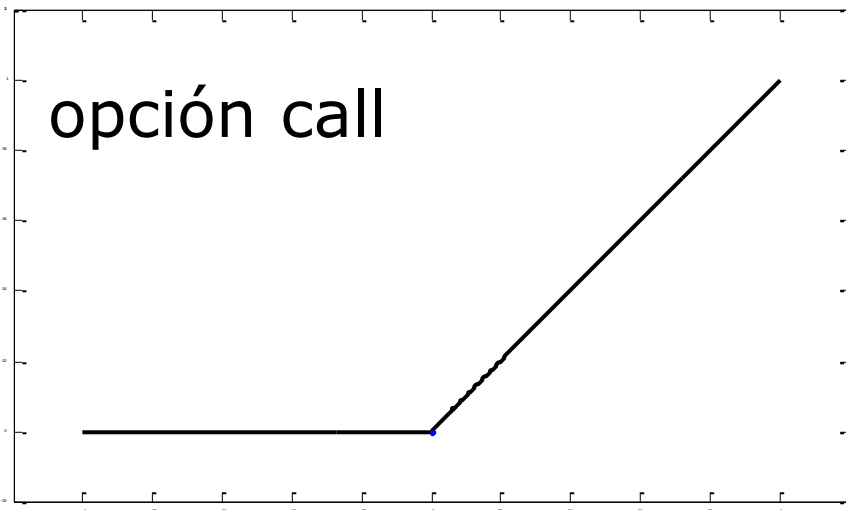


derivado(\$)

forward



opción call

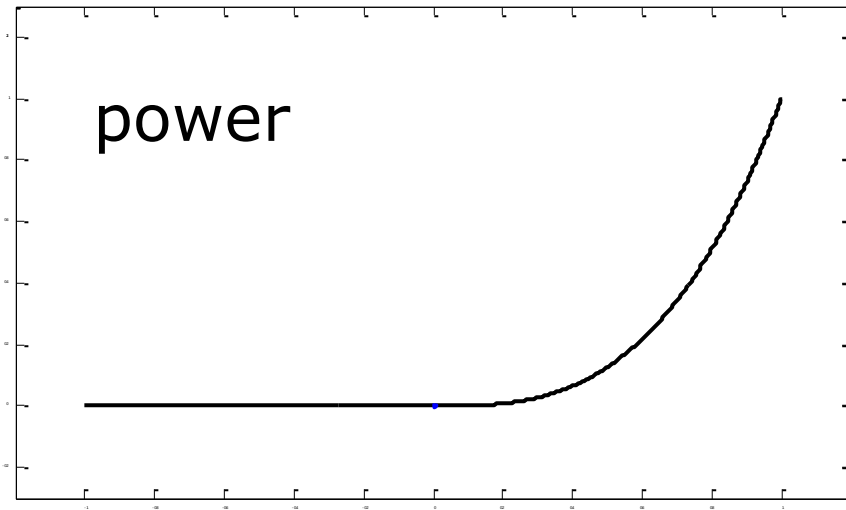


derivado(\$)

digital



power



activo(\$)

activo(\$)

THE
THEORY
OF
“OPTIONS”
IN
STOCKS AND SHARES.

BY CHARLES CASTELLI.

LONDON:

PRINTED AND PUBLISHED BY FREDC. C. MATHIESON
BARTHOLOMEW HOUSE, BANK.

1877.

All Rights Reserved.

[Price Two Shillings.]

THE THEORY OF OPTIONS IN STOCKS AND SHARES.

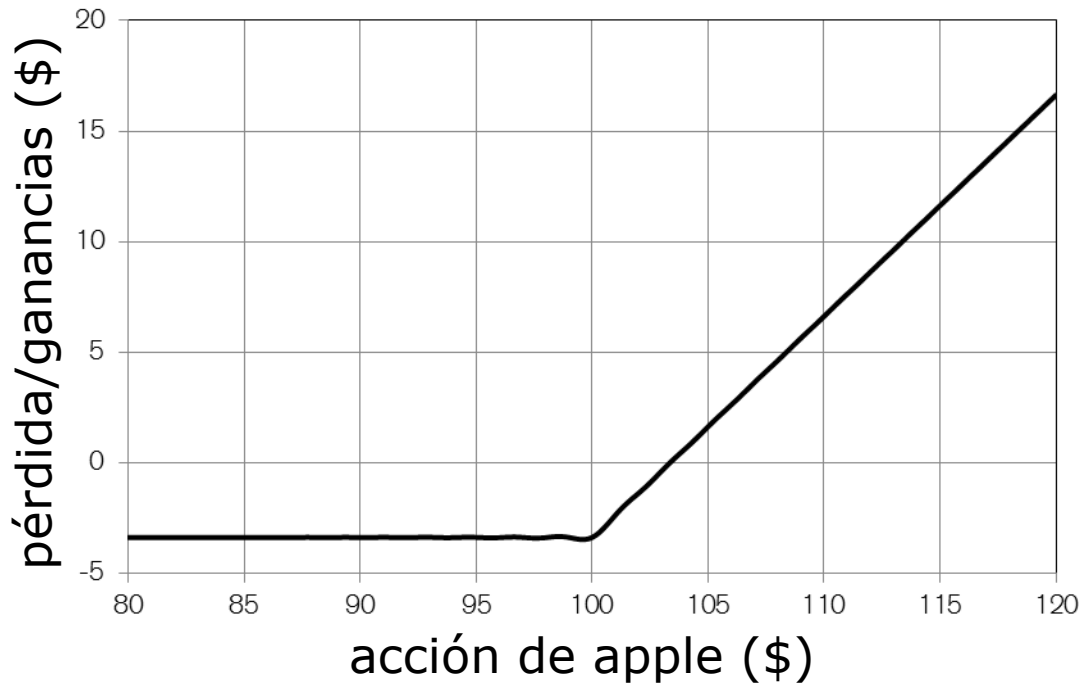
PART I.

THE “CALL.”

Definition of the “Call.”

THE “Call” is the Option by which a person has the right to buy or not, *at his choice*, a certain quantity of Stocks or Shares at a determined price and at a fixed future date, by the payment of an agreed premium. If, during and up to the time this operation extends, a *rise* occurs in the value of the Stock operated in, the Option is realised, and the profit secured by selling in the market a similar quantity to that contracted. Should a *fall* occur, or if prices remain stationary, then the optional bargain is abandoned, and the loss is limited to the payment of the agreed premium only. We will suppose that 1%, or £100, is paid for the “call” of £10,000 Egypt Unified at 38 up to the 31st August account, and that at that date the quotation stands at 44. The buyer of the “call” has the right to claim his contracted quantity at the fixed price of 38, and by selling it in the market he realises a profit of £500, after deducting the 1% premium paid—thus having gained £500 with a risk of £100 only.

opción de compra (call)



activo: AAPL

strike: \$100

vencimiento: octubre 18, 2014

pago: $\max(0, \text{AAPL} - \$100)$

precio*: \$3.37 (\$3.35/\$3.40)

este precio ¿es el correcto?

*tomado agosto 18, 2014

Apple Inc. (NASDAQ:AAPL)

98.89
+0.91 (0.93%)

Real-time: 10:44AM EDT
NASDAQ real-time data - Disclaimer
Currency in USD

Range	97.98 - 98.94	Div/yield	0.47/1.90
52 week	63.89 - 99.44	EPS	6.19
Open	98.49	Shares	5,987.87M
Vol / Avg	12.51M/46.56M	Beta	0.89
Mkt cap	592,080.24M	Inst. own	62%
P/E	15.97		

Dow Jones	16,813.83	0.91%	
NASDAQ	4,500.27	0.79%	
Technology		0.21%	
AAPL	98.89	0.93%	

8+1 193



*tomado agosto 18, 2014

Black-Scholes [1973], Merton [1973]

el precio de un derivado $V(S, t)$ sobre un activo subyacente $S(t)$ satisface la siguiente EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

donde r es la tasa de interés sin riesgo

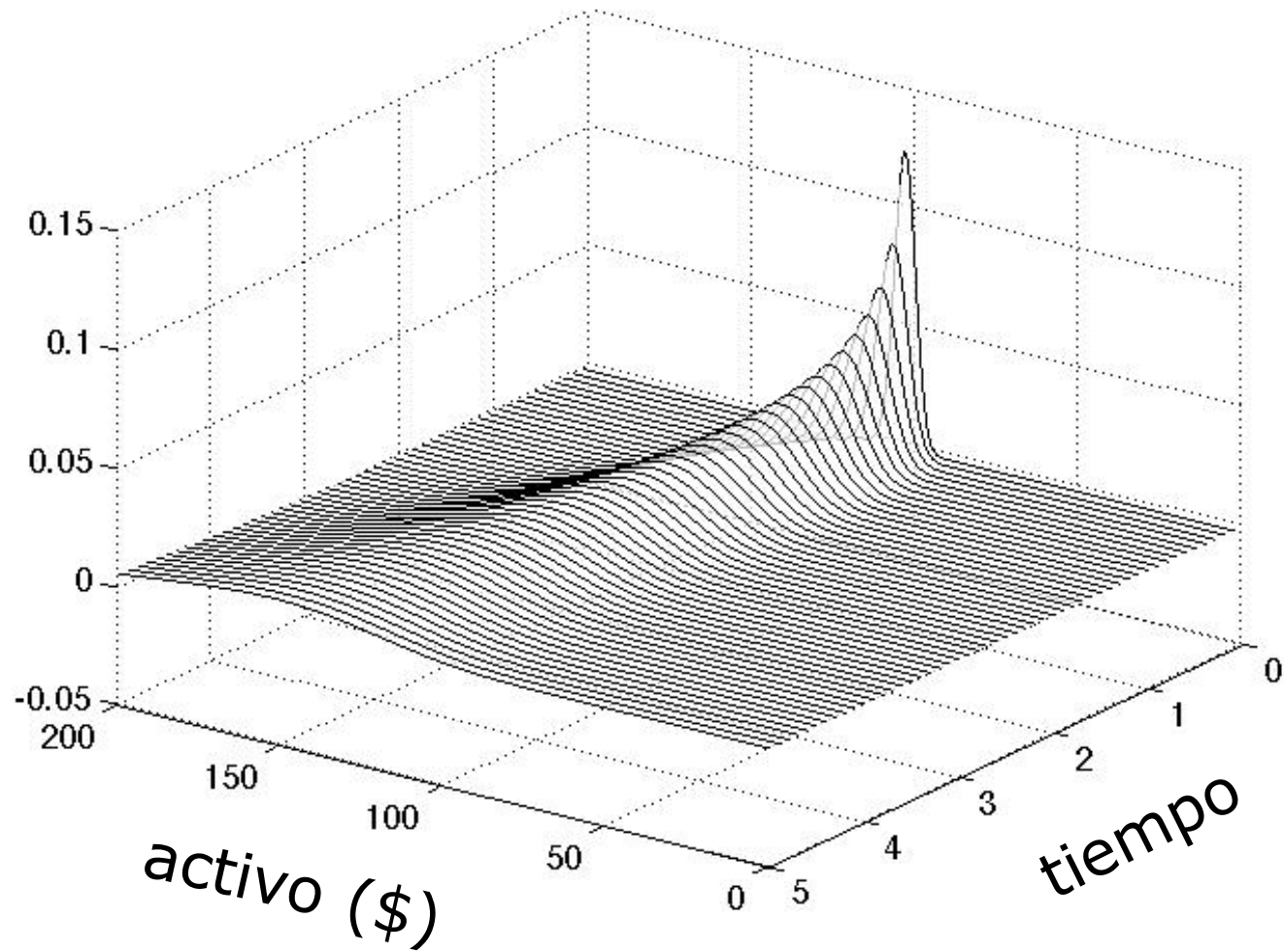
un supuesto (de muchos otros)

$S(t)$ evoluciona de acuerdo a un movimiento Browniano geométrico con tendencia μ y volatilidad σ :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener

evolución de la función de densidad de probabilidad



Black-Scholes [1973], Merton [1973]

1. por el lema de Itô, si $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, entonces

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW$$

Black-Scholes [1973], Merton [1973]

1. por el lema de Itô, si $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, entonces

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW$$

2. construya el portafolio $\Pi(t) = V(t) + \delta S(t)$, i.e., una opción y δ acciones

Black-Scholes [1973], Merton [1973]

1. por el lema de Itô, si $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, entonces

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW$$

2. construya el portafolio $\Pi(t) = V(t) + \delta S(t)$, i.e., una opción y δ acciones

3. asuma que el portafolio se auto-financia, i.e., $d\Pi = dV + \delta dS$, por lo tanto

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S \delta \right) dW$$

Black-Scholes [1973], Merton [1973]

1. por el lema de Itô, si $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, entonces

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW$$

2. construya el portafolio $\Pi(t) = V(t) + \delta S(t)$, i.e., una opción y δ acciones

3. asuma que el portafolio se auto-financia, i.e., $d\Pi = dV + \delta dS$, por lo tanto

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S \delta \right) dW$$

4. si la cantidad de acciones es $\delta = \partial V / \partial S$, entonces elimine la aleatoriedad

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt$$

Black-Scholes [1973], Merton [1973]

1. por el lema de Itô, si $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, entonces

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW$$

2. construya el portafolio $\Pi(t) = V(t) + \delta S(t)$, i.e., una opción y δ acciones

3. asuma que el portafolio se auto-financia, i.e., $d\Pi = dV + \delta dS$, por lo tanto

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S \delta \right) dW$$

4. si la cantidad de acciones es $\delta = \partial V / \partial S$, entonces elimine la aleatoriedad

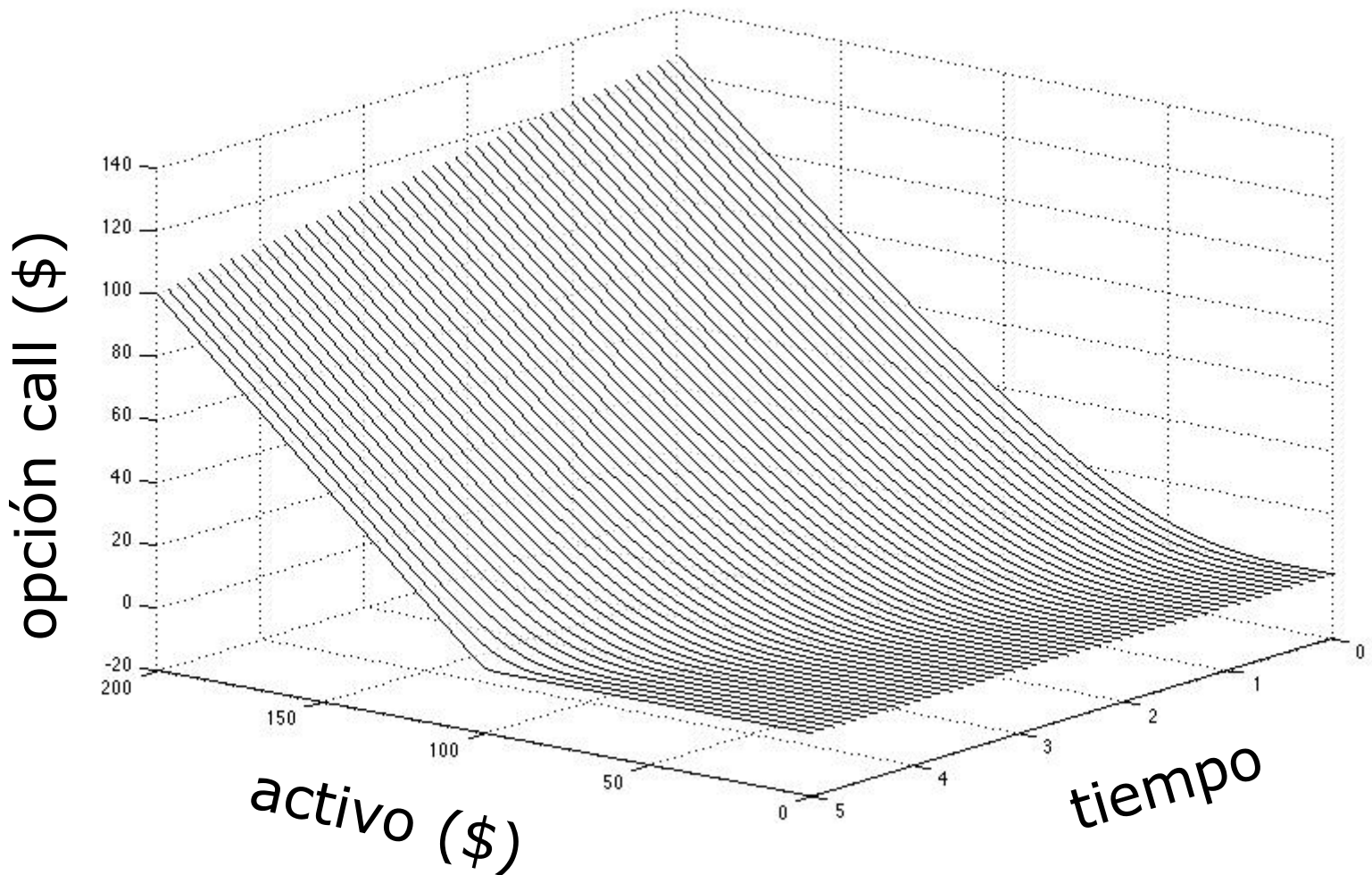
$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt$$

5. portafolio no tiene riesgo, por lo tanto su rendimiento debe ser dado por la tasa de interés sin riesgo r , $d\Pi = r\Pi dt$, de lo que sigue

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

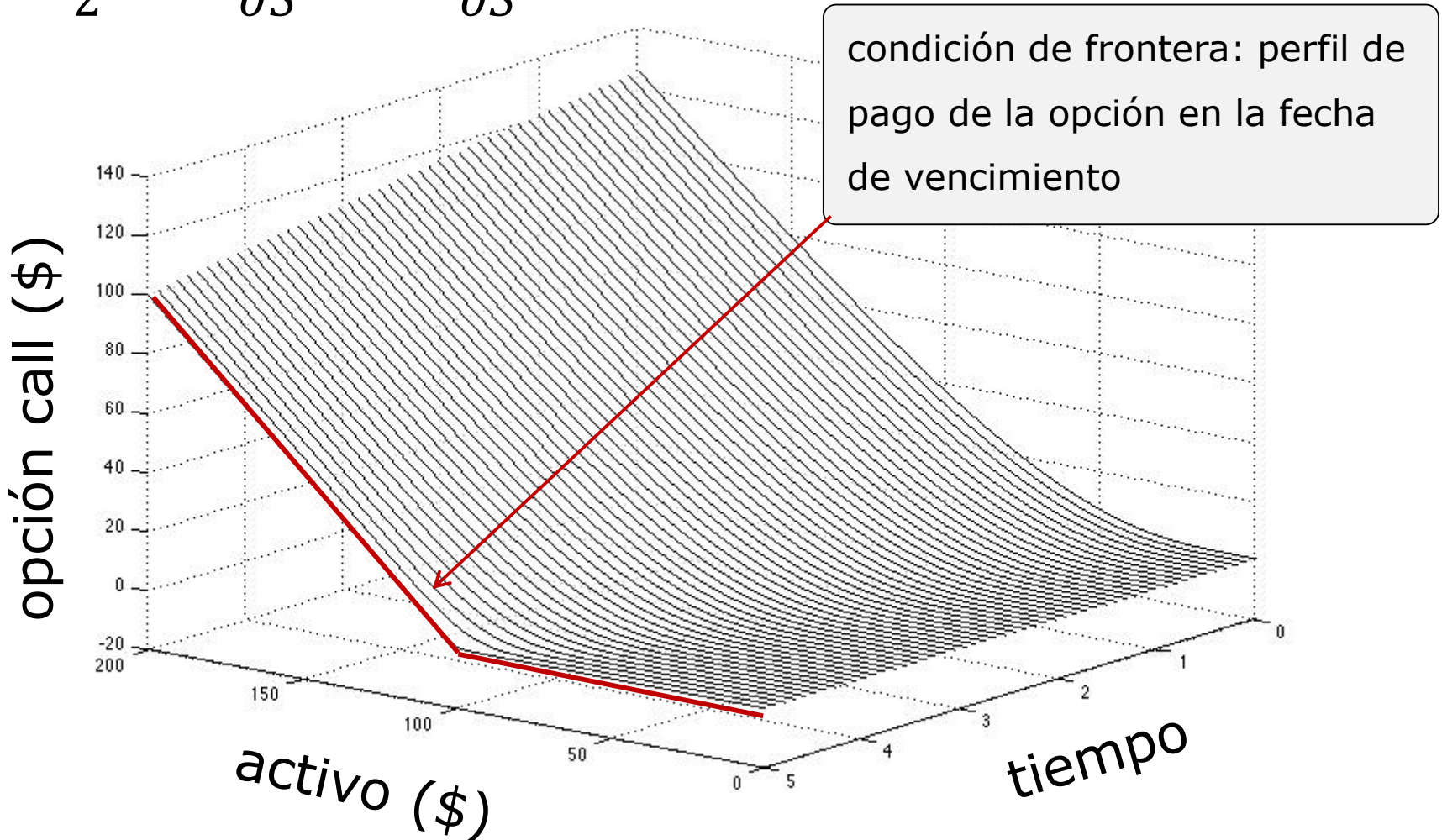
evolución del precio opción call

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$



evolución del precio opción call

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$



más que un supuesto es una receta:
cobertura dinámica (“dynamic hedging”)

cobertura: posición que cancela el efecto de las fluctuaciones del activo sobre el derivado objetivo

$$\underbrace{a_1 H_1(\Delta S, \Delta t) + a_2 H_2(\Delta S, \Delta t) + \cdots + a_m H_m(\Delta S, \Delta t)}_{\text{cobertura}} = \underbrace{V(\Delta S, \Delta t)}_{\substack{\text{derivado} \\ \text{objetivo}}}$$

más que un supuesto es una receta: cobertura dinámica ("dynamic hedging")

cobertura: posición que cancela el efecto de las fluctuaciones del activo sobre el derivado objetivo

$$\underbrace{a_1 H_1(\Delta S, \Delta t) + a_2 H_2(\Delta S, \Delta t) + \dots + a_m H_m(\Delta S, \Delta t)}_{\text{cobertura}} = \underbrace{V(\Delta S, \Delta t)}_{\substack{\text{derivado} \\ \text{objetivo}}}$$

"...si la cantidad de acciones es $\delta = \partial V / \partial S$, entonces elimine la aleatoriedad..."

$H = S$: tomar una posición en el activo...

$a = [\partial V / \partial S]_{S(t), t}$: ...que cancela la componente lineal

demostración: cobertura dinámica

cobertura global y de orden superior:
¿qué es?

idea

sustituir aproximaciones

locales y de **bajo orden**

por aproximaciones

globales y de **orden superior**

cobertura de orden superior: ¿qué es?

1. usar derivados para cubrir otros derivados

cobertura de orden superior: ¿qué es?

1. usar derivados para cubrir otros derivados
2. la cobertura es estática (no dinámica)

cobertura de orden superior: ¿qué es?

1. usar derivados para cubrir otros derivados
2. la cobertura es estática (no dinámica)
3. la cobertura aproxima el comportamiento del derivado desde el inicio hasta el vencimiento

cobertura de orden superior: ¿qué es?

1. usar derivados para cubrir otros derivados
2. la cobertura es estática (no dinámica)
3. la cobertura aproxima el comportamiento del derivado desde el inicio hasta el vencimiento
4. el máximo error de la aproximación se conoce de antemano

demostración: cobertura de orden superior

cobertura global y de orden superior:
¿cómo se construye?

datos
(tal vez
complejos)

$$\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]^T$$

diferentes

$$\mathbf{f} = [f_0, \dots, f_n]^T$$

polinomios interpolantes:
definición

$$p(x) \in P(n)$$

$$p(x_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n$$

polinomios interpolantes: construcción

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \phi_j(x),$$

$\{\phi_j\}$: base para $P(n)$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \phi_0(x) & \dots & \phi_n(x) \end{array} \right) \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

matriz de tipo Vandermonde
de tamaño $(n+1) \times (n+1)$

esquemas interpolantes

$$x_0^{(0)}$$

$$x_0^{(1)} \quad x_1^{(1)}$$

$$x_0^{(2)} \quad x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$

$$x_0^{(n)} \quad x_1^{(n)} \quad x_2^{(n)} \quad \dots \quad x_n^{(n)}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$

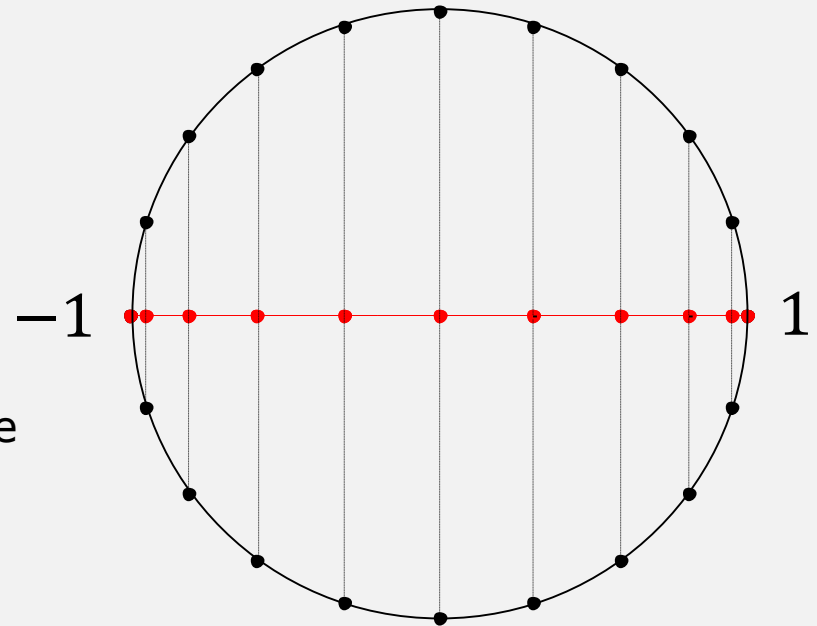
definición de la malla de $n + 1$ puntos,
e.g., puntos equidistantes en $[-1,1]$

$$x_j^{(n)} = -1 + \frac{2j}{n}, j = 0, \dots, n$$

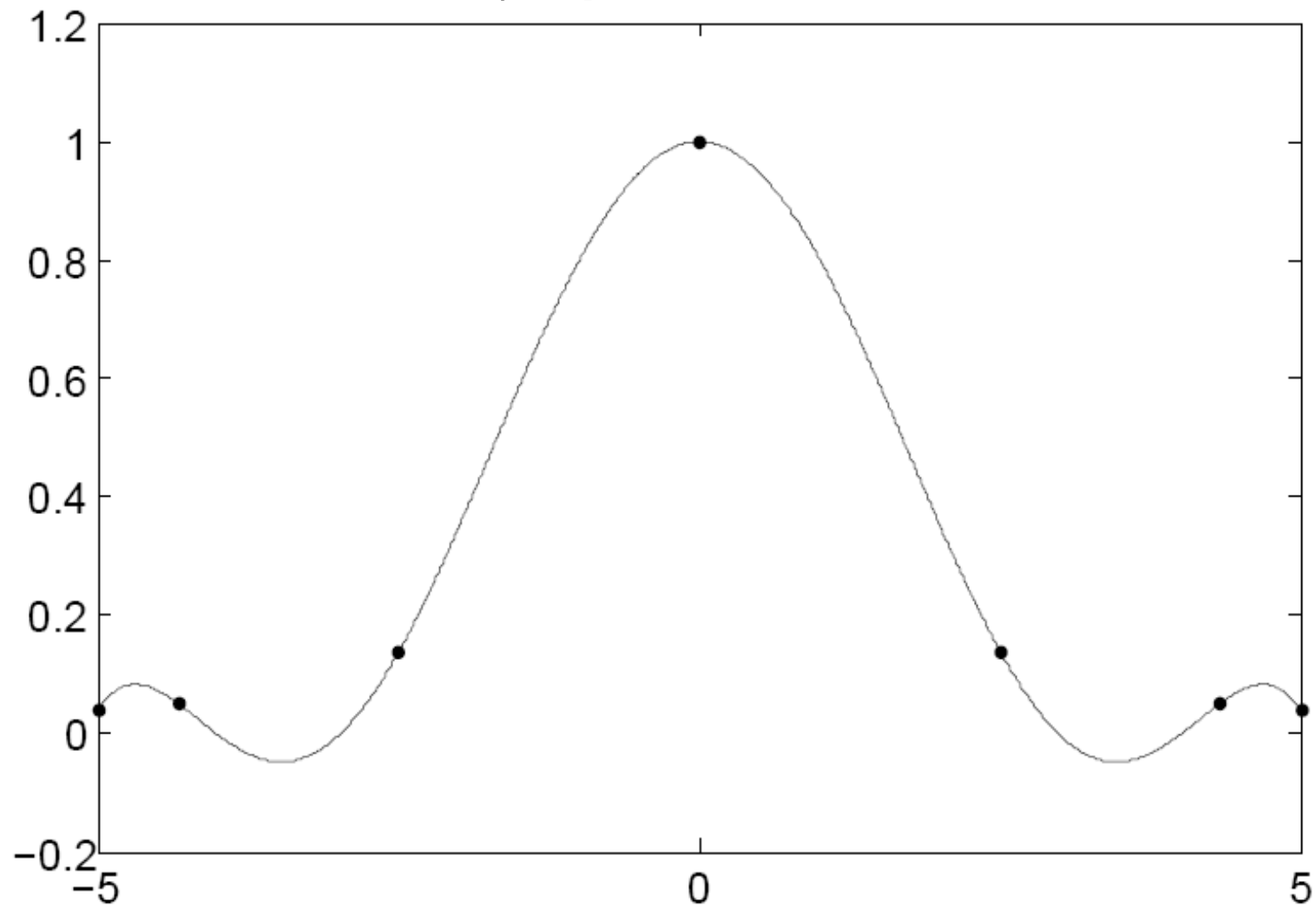
una buena malla: **nodos de Chebyshev**

$$x_k = -\cos \frac{k\pi}{n}, k = 0, \dots, n$$

proyecciones de las raíces n-esimas de la unidad (los nodos quedan **apiñados** hacia los extremos)

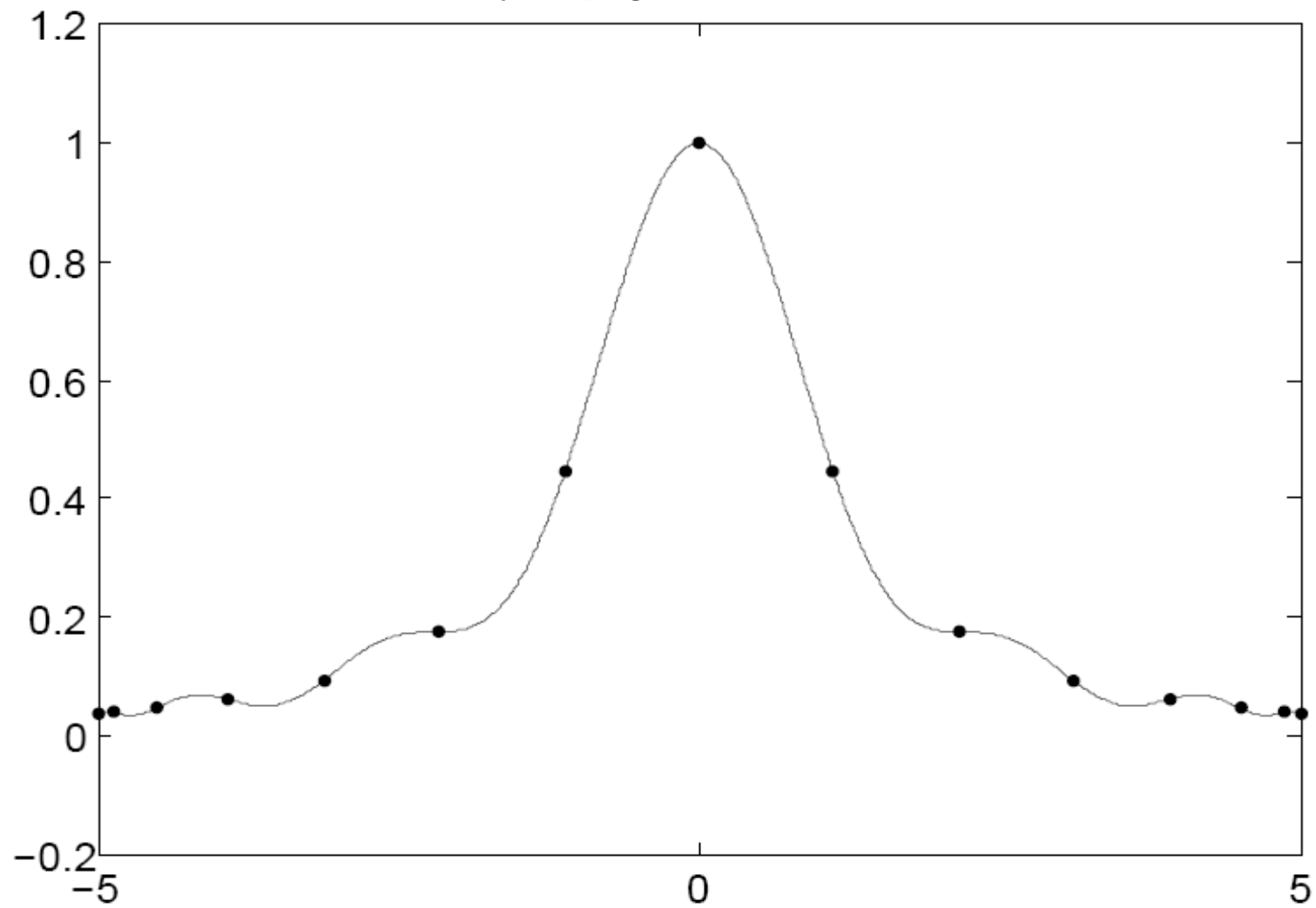


$$\|f - p_7\| = 4.92 \times 10^{-1}$$



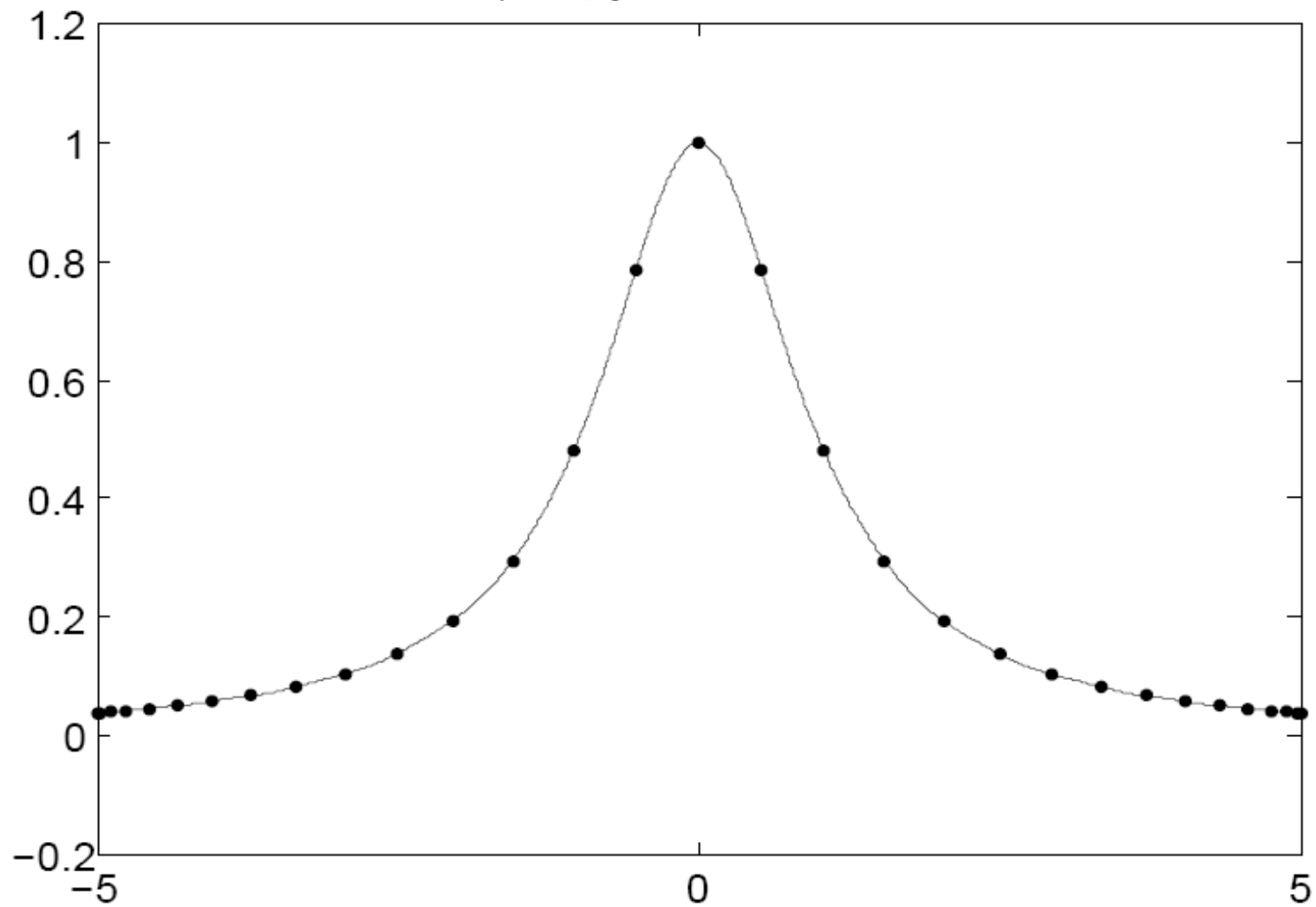
$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

$$\|f - p_{15}\| = 8.47 \times 10^{-2}$$



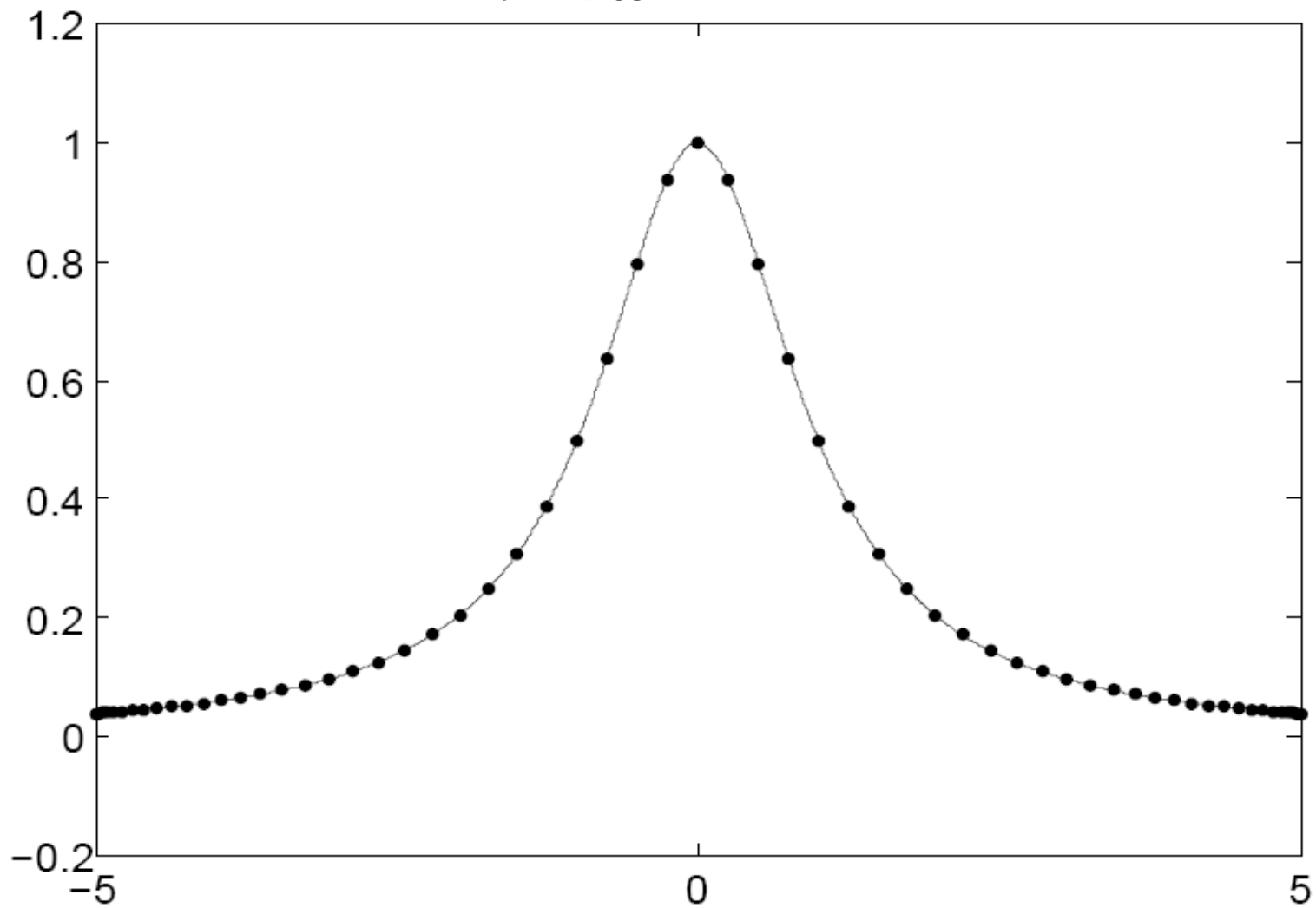
$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

$$\|f - p_{31}\| = 3.46 \times 10^{-3}$$



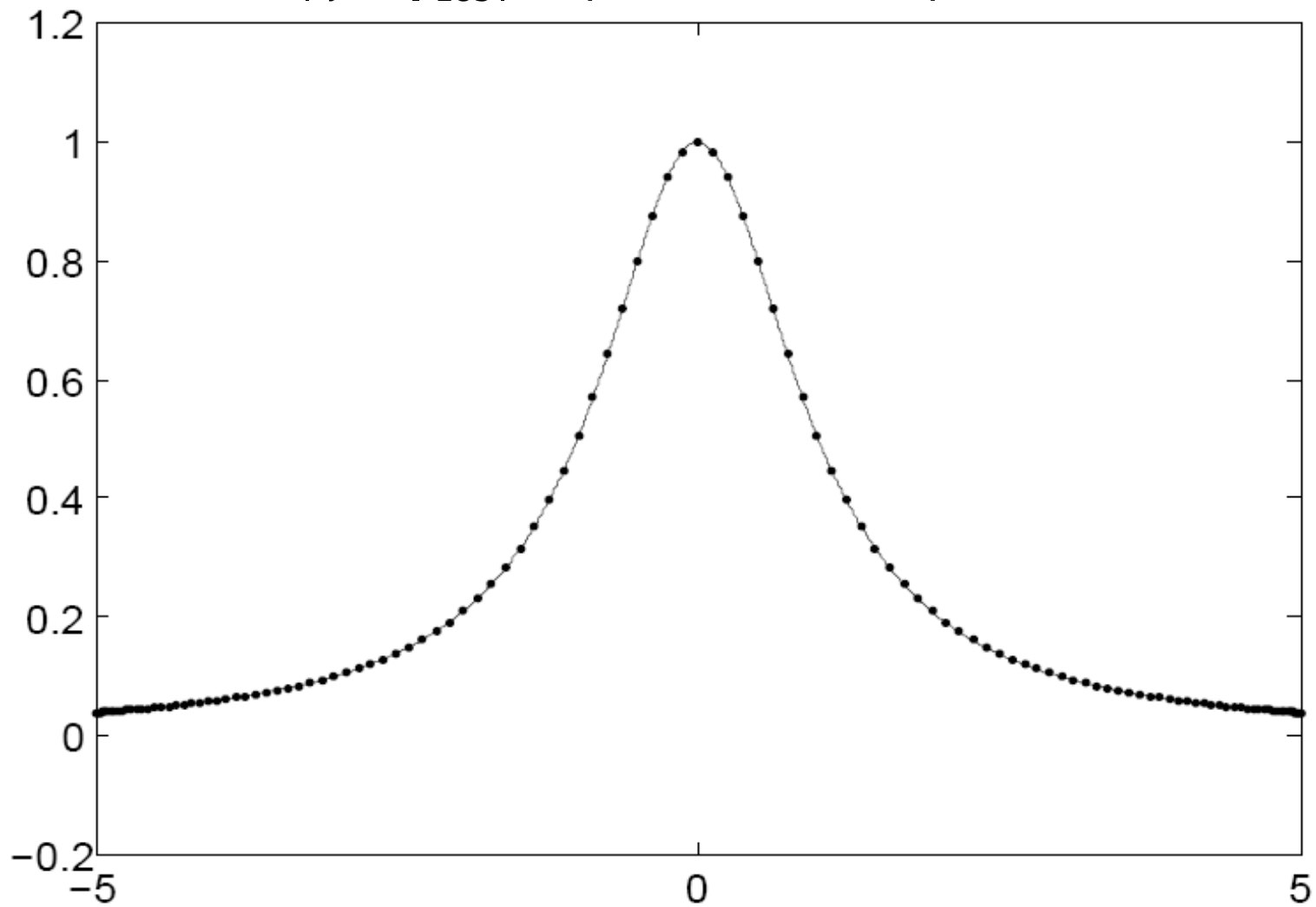
$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

$$\|f - p_{63}\| = 6.00 \times 10^{-6}$$



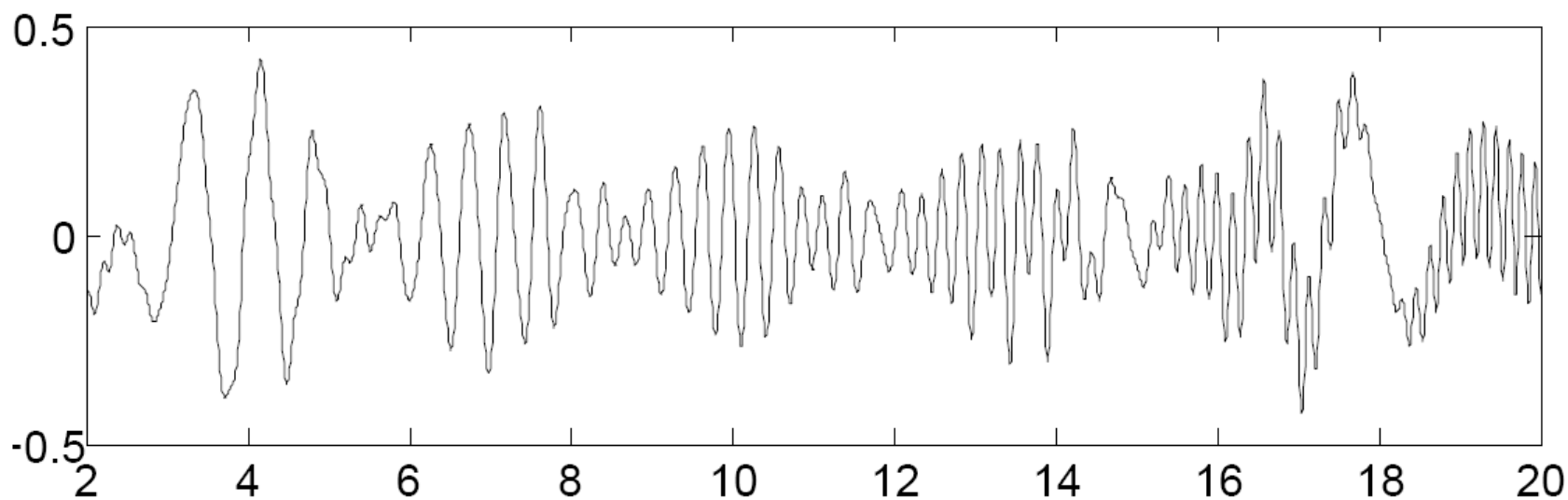
$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

$\|f - p_{183}\| \approx \text{precisión de máquina}$



$$f(x) = (1 + x^2)^{-1}$$

$$\|f - p_{492}\| \approx \text{precisión de máquina}$$



$$f(x) = \sin(x^2)J_0(x) + \sin(x)J_1((20-x)^2)$$

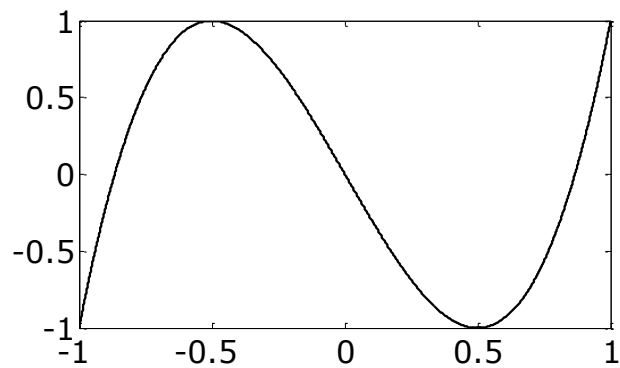
conexión con series de Chebyshev

teorema: si f es una función Lipschitz continua en $[-1,1]$ entonces

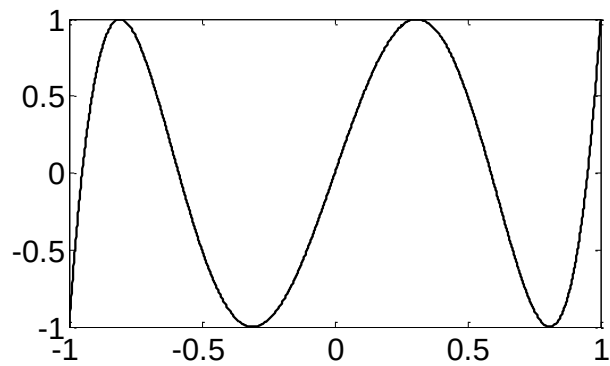
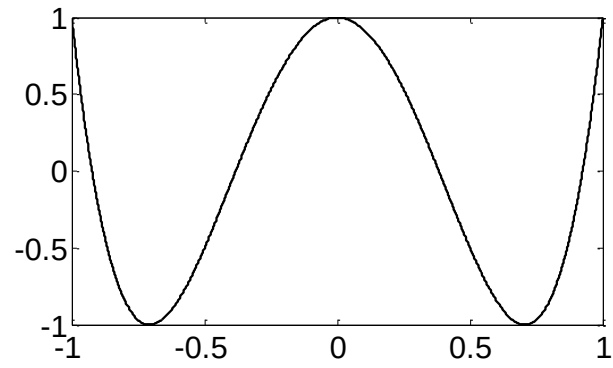
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x) \text{ con coeficientes } c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

donde $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ es el *polinomio de Chebyshev de primer tipo* de grado k

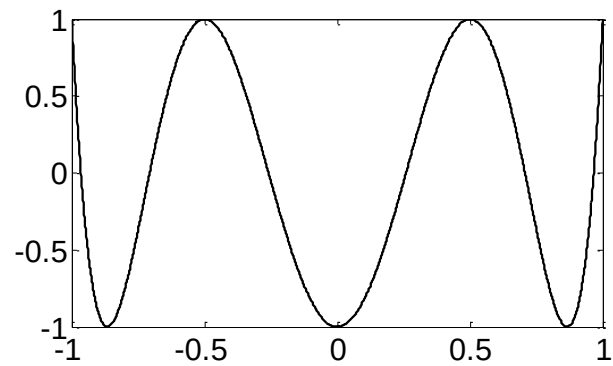
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$



$$T_4(x)$$



$$T_5(x)$$



$$T_6(x)$$

$$x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

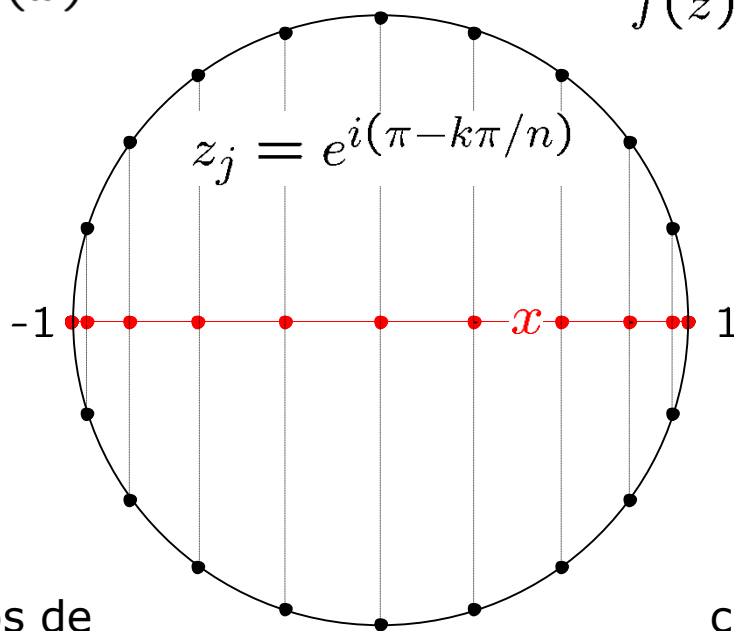
$$|z| = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k T_k(x)$$

Chebyshev

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k (z^k + z^{-k})$$

Laurent



interpolación en puntos de
Chebyshev $x_k = \cos(k\pi/n)$

coeficientes se obtienen
de resolver un sistema
de Vandermonde (FFT)

$$x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

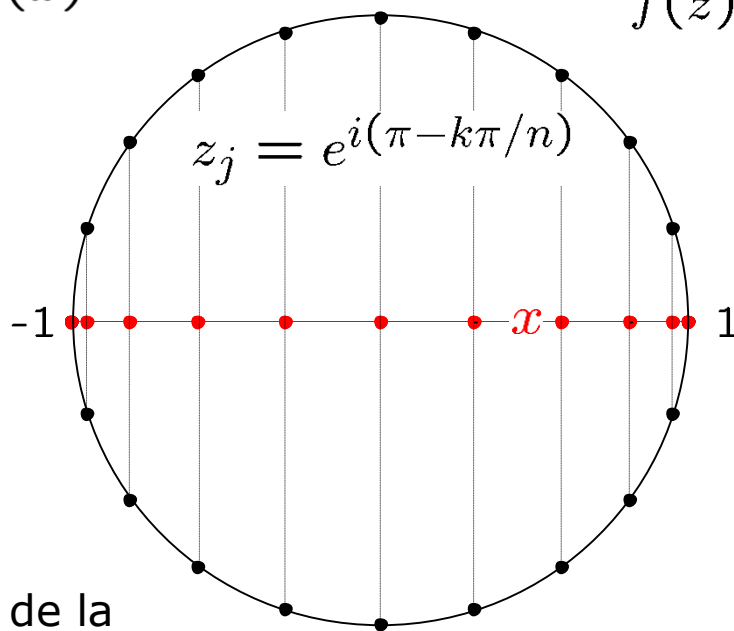
$$|z| = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k T_k(x)$$

Chebyshev

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k (z^k + z^{-k})$$

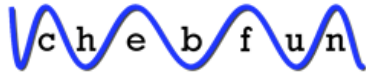
Laurent



obtiene los valores de la
función en puntos de
Chebyshev (iFFT)

coeficientes de
Chebyshev

www.chebfun.org

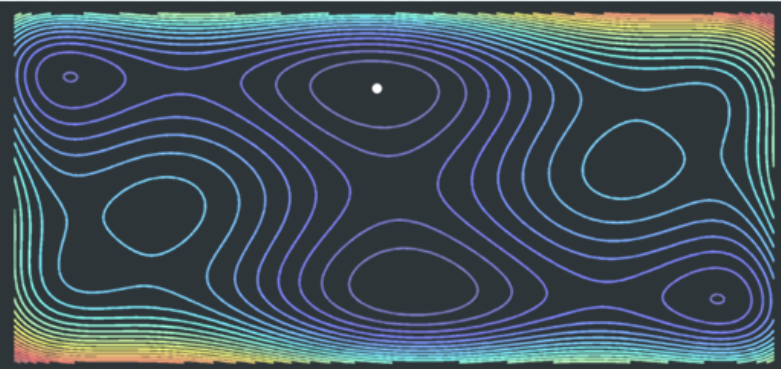
[About](#)[News](#)[Download](#)[Docs](#)[Examples](#)[Support](#)

Chebfun — numerical computing with functions

Chebfun is an open-source package for computing with functions to 15-digit accuracy. Most Chebfun commands are overloads of familiar MATLAB commands — for example `sum(f)` computes an integral, `roots(f)` finds zeros, and `u = L\f` solves a differential equation.

[DOWNLOAD V5](#)[BROWSE SOURCE](#)

```
% The Dixon-Szego function
f = @(x,y) (4-2.1*x.^2+ x.^4/3).*x.^2 ...
           + x.*y + 4*(y.^2-1).*y.^2;
% Create a chebfun2
F = chebfun2(f, [-2,2,-1.25,1.25]);
% Find the minimum and mark it
[minf,minx] = min2(F);
contour(F,30), hold on
plot(minx(1),minx(2),'.w')
```



cobertura de orden superior: ¿cómo se construye?

1. descomponga el pago del derivado objetivo $V(S, T)$ en series de Chebyshev

$$V(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(S), \quad S \in [a, b]$$

cobertura de orden superior: ¿cómo se construye?

1. descomponga el pago del derivado objetivo $V(S, T)$ en series de Chebyshev

$$V(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(S), \quad S \in [a, b]$$

2. descomponga el pago de los $m+1$ derivados de cobertura $\{H_i(S, T)\}$ en series de Chebyshev

$$H_i(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} T_j(S), \quad i = 0, \dots, m, \quad S \in [a, b]$$

cobertura de orden superior: ¿cómo se construye?

1. descomponga el pago del derivado objetivo $V(S, T)$ en series de Chebyshev

$$V(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(S), \quad S \in [a, b]$$

2. descomponga el pago de los $m+1$ derivados de cobertura $\{H_i(S, T)\}$ en series de Chebyshev

$$H_i(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} T_j(S), \quad i = 0, \dots, m, \quad S \in [a, b]$$

3. encuentre los pesos $\{a_i\}$ de tal manera que

$$a_0 h_{0,j} + a_1 h_{1,j} + \dots + a_m h_{m,j} \approx c_j, \quad j = 0, \dots, m$$

cobertura de orden superior: ¿cómo se construye?

1. descomponga el pago del derivado objetivo $V(S, T)$ en series de Chebyshev

$$V(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(S), \quad S \in [a, b]$$

2. descomponga el pago de los $m+1$ derivados de cobertura $\{H_i(S, T)\}$ en series de Chebyshev

$$H_i(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} T_j(S), \quad i = 0, \dots, m, \quad S \in [a, b]$$

3. encuentre los pesos $\{a_i\}$ de tal manera que

$$\underbrace{a_0 h_{0,j} + a_1 h_{1,j} + \dots + a_m h_{m,j}}_{\text{coeficiente } k \text{ de la cobertura}} \approx \underbrace{c_j}_{\text{coeficiente } k \text{ del derivado objetivo}}, \quad j = 0, \dots, m$$

coeficiente k de
la cobertura

coeficiente k del
derivado objetivo

cobertura de orden superior:

coeficientes de opciones call

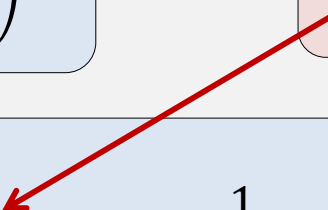
el pago en la fecha de vencimiento de una call con strike $k_i \in [a, b]$, sobre un activo $S \in [a, b]$ se puede descomponer como $\max(0, S - k_i) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} T_j(S)$, donde

$$h_{i,0} = \frac{b-a}{2\pi} \left(\sqrt{1 - k_i'^2} - k_i' \arccos k_i' \right)$$

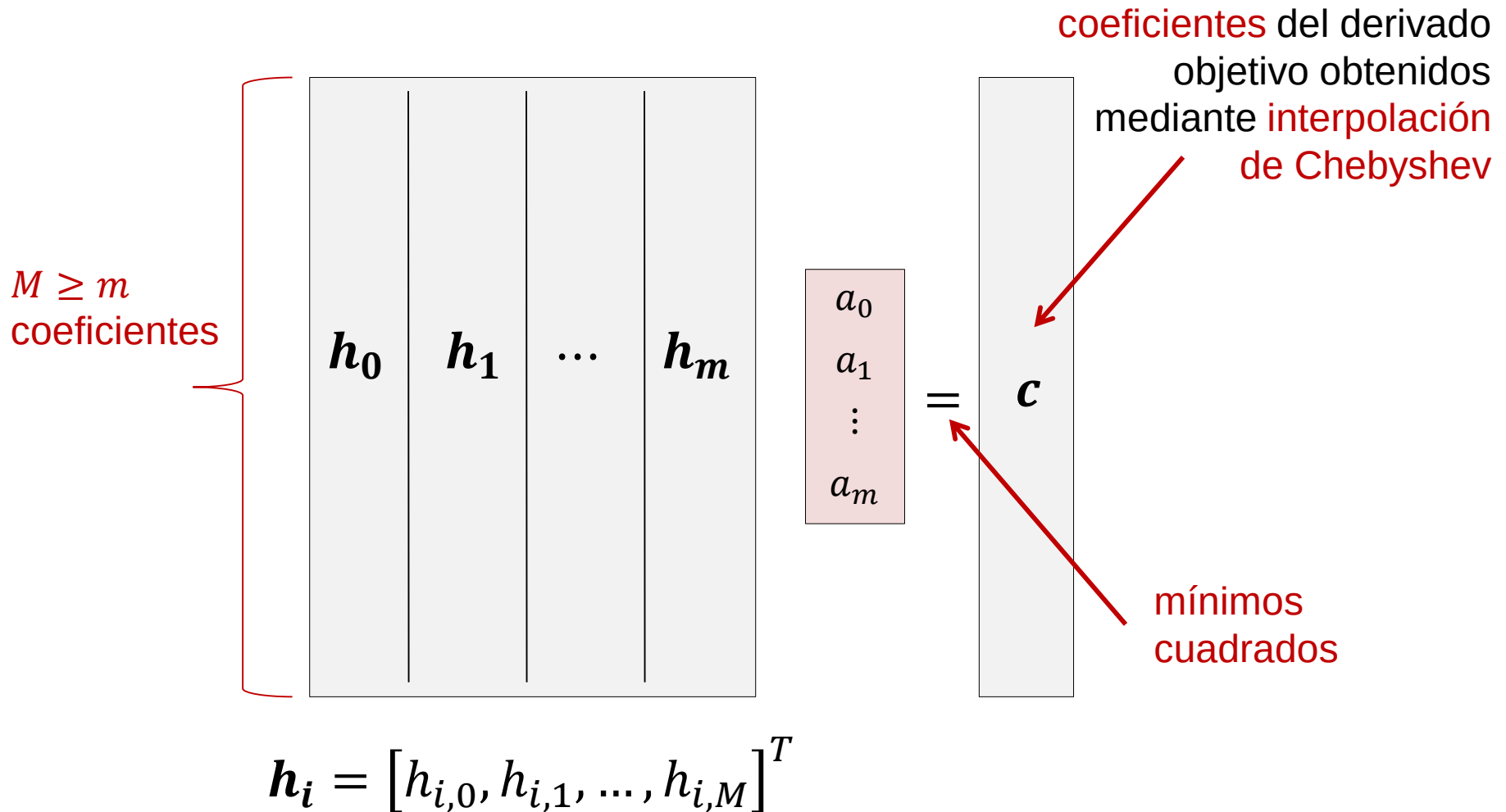
k_i' : k_i transformado linealmente a $[-1,1]$

$$h_{i,1} = \frac{b-a}{2\pi} \left(\arccos k_i' - k_i' \sqrt{1 - k_i'^2} \right)$$

$$U_j(x) = \frac{\sin((j+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

$$h_{i,j} = \frac{(b-a) \sqrt{1 - k_i'^2}}{\pi} \left(\frac{k_i'}{j(j^2 - 1)} U_{j-1}(k_i') - \frac{1}{j^2 - 1} T_j(k_i') \right), \quad j \geq 2$$


cobertura de orden superior: sistema lineal de máximo contacto



cobertura de orden superior:

consideraciones finales

1. el error de la cobertura se mantiene acotado para cambios bruscos del precio del activo o saltos en la volatilidad (iconsecuencia de la difusión!)

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

1. el error de la cobertura se mantiene acotado para cambios bruscos del precio del activo o saltos en la volatilidad (iconsecuencia de la difusión!)
2. la cobertura tiene la misma fecha de vencimiento que el derivado objetivo (y es para esa fecha donde se busca el máximo contacto)

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

1. el error de la cobertura se mantiene acotado para cambios bruscos del precio del activo o saltos en la volatilidad (iconsecuencia de la difusión!)
2. la cobertura tiene la misma fecha de vencimiento que el derivado objetivo (y es para esa fecha donde se busca el máximo contacto)
3. se pueden establecer estrategias semi-estáticas, en las que la cobertura y el derivado tienen máximo contacto para una fecha previa (pros: el perfil es más suave y series convergen rápidamente; cons: ¿depende del modelo?)

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

4. en general, el pago del derivado objetivo debe ser:

- ☐ de tipo Europeo
- ☐ continuo
- ☐ acotado (con caps/floors)
- ☐ sobre un sólo activo subyacente

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

4. en general, el pago del derivado objetivo debe ser:

- ☒ ~~de tipo Europeo~~ barreras, tal vez Americanas?
- ☐ continuo
- ☐ acotado (con caps/floors)
- ☐ sobre un sólo activo subyacente

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

4. en general, el pago del derivado objetivo debe ser:

- ~~☐ de tipo Europeo~~ barreras, tal vez Americanas?
- ~~☐ continuo~~ discontinuas, aprox. de Padé?
- ☐ acotado (con caps/floors)
- ☐ sobre un sólo activo subyacente

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

4. en general, el pago del derivado objetivo debe ser:

- ~~❑ de tipo Europeo~~ barreras, tal vez Americanas?
- ~~❑ continuo~~ discontinuas, aprox. de Padé?
- ~~❑ acotado (con caps/floors)~~ mapeo a $[0, \infty)$? Laguerre?
- ❑ sobre un sólo activo subyacente

cobertura de orden superior:

consideraciones finales

4. en general, el pago del derivado objetivo debe ser:

- ~~❑ de tipo Europeo~~ barreras, tal vez Americanas?
- ~~❑ continuo~~ discontinuas, aprox. de Padé?
- ~~❑ acotado (con caps/floors)~~ mapeo a $[0, \infty)$? Laguerre?
- ❑ sobre un sólo activo subyacente

5. la cobertura no es única: ¿cómo seleccionar los derivados de cobertura? ¿buscar minimizar costos? ¿minimizar el error?

ricardo.pachon@credit-suisse.com